Logique & Analyse **133-134** (1991), 15-22

DEUX REDONDANCES DE LA RÈGLE DE LÖB EN LOGIQUE MODALE

Marcel CRABBÉ

Abstract.

We show in a purely syntactic way that the systems K and E of propositional modal logic are closed under Löb's rule: $\Box A \to A/A$.

1. *Introduction*

Les systèmes que nous aborderons sont formulés dans le langage de la logique propositionnelle modale, c'est-à-dire le langage propositionnel augmenté de deux opérateurs unaires, notés $\Box$ et $\Diamond$. Nous supposerons que les symboles $\top$ et $\bot$ («vrai» et «faux») font partie du langage. Les formules $\Box A$ et $\Diamond A$ se lisent «carré A» ou «nécessaire A», et «losange A» ou «possible A», respectivement. Un système de logique modale comprend les tautologies, des axiomes *propres*, la règle du *modus ponens*:

$$\frac{A \to B \quad A}{B}$$

et des règles *propres*(1).

Nous allons examiner la règle

$$\frac{\Box A \to A}{A}$$

Cette règle s'appelle L, «L» comme «Löb». Son origine est la suivante. Selon le second théorème d'incomplétude de Gödel, il n'est pas possible de démontrer, dans un système axiomatique assez expressif, la cohérence du système si le système est cohérent. En interprétant $\Box A$ comme signifiant «A est démontrable» (voir Gödel [4]) cela peut se traduire par l'impossibilité

(1) Le manuel de référence pour la logique modale propositionnelle est le livre de Chellas [2].

de démontrer $\neg\Box\bot$, si $\bot$ n'est pas démontrable. Cela revient à dire que si $\Box\bot \to \bot$ est démontrable, alors $\bot$ l'est également. C'est un cas particulier de la règle L. Löb (dans Löb [3]), en répondant à une conjecture de Henkin, a généralisé le résultat de Gödel en montrant que la règle L est valable —pour l'interprétation de $\Box$ comme «démontrable»— quel que soit A.

Nous montrerons d'une manière purement *syntaxique* que la règle L est redondante dans certains systèmes faibles de logique modale.

2. *Les transformations normales*

Définitions

1. Une *transformation normale* est une opération Φ qui associe à chaque formule A du langage une formule $\Phi(A)$ telle que les conditions suivantes soient vérifiées[2]:
   - $\Phi(A) \equiv A$, si A est un symbole propositionnel ou $\top$ ou $\bot$
   - $\Phi(\neg A) \equiv \neg\Phi(A)$
   - $\Phi(A \wedge B) \equiv \Phi(A) \wedge \Phi(B)$
   - $\Phi(A \vee B) \equiv \Phi(A) \vee \Phi(B)$
   - $\Phi(A \to B) \equiv \Phi(A) \to \Phi(B)$
   - $\Phi(A \leftrightarrow B) \equiv \Phi(A) \leftrightarrow \Phi(B)$

2. La *complexité modale*, comp(A), de la formule A est le nombre des occurrences des symboles $\Box$ et $\Diamond$, figurant dans A.

Proposition 1

Si Φ est une transformation normale et si $\Phi(\Box B) \equiv \Box\Phi(B)$, et $\Phi(\Diamond B) \equiv \Diamond\Phi(B)$ pour toute formule B telle que comp(B) $<$ comp(A), *alors $\Phi(A) \equiv A$.*

Démonstration

Par induction sur la structure de A.

(2) $A \equiv B$ signifiera que A est la même formule que B.

Pour définir une transformation normale, Φ, il suffit de définir $\Phi(\Box A)$, et $\Phi(\Diamond A)$ pour toute formule A. Cela peut se faire directement ou éventuellement par induction sur la structure des formules.

EXEMPLES

— $\Xi(\Box A) \equiv \Xi(\Diamond A) \equiv \Xi(A)$, effacement de tous les $\Box$ et $\Diamond$.
— $\Psi(\Box A) \equiv \Psi(\Diamond A) \equiv A$, effacement des occurrences extérieures de $\Box$ et $\Diamond$.
— Pour chaque formule C, on définit une *trivialisation* Φ_C comme suit: $\Phi_C(\Box A) \equiv C$, $\Phi_C(\Diamond A) \equiv \neg C$.
— Si Γ est un ensemble de formules et si C est une formule, on définit les transformations normales $\Phi_{\Gamma,C}$, en imposant les conditions suivantes:
$\Phi_{\Gamma,C}(\Box A) \equiv C$, si A est dans Γ,
$\Phi_{\Gamma,C}(\Box A) \equiv \Box\Phi_{\Gamma,C}(A)$, si A n'est pas dans Γ,
$\Phi_{\Gamma,C}(\Diamond A) \equiv \neg C$, si $\neg A$ est dans Γ,
$\Phi_{\Gamma,C}(\Diamond A) \equiv \Diamond\Phi_{\Gamma,C}(A)$, si $\neg A$ n'est pas dans Γ.
— Si Φ est une transformation normale, on définit des transformations normales Φ_n pour chaque entier $n \geq 0$ de la manière suivante:
$\Phi_0 = \Phi$
$\Phi_{n+1}(\Box A) \equiv \Box\Phi_n(A)$
$\Phi_{n+1}(\Diamond A) \equiv \Diamond\Phi_n(A)$

PROPOSITION 2(3)

1. *Si* $n \geq \mathrm{comp}(A)$, *alors* $\Phi_n(A) \equiv A$.
2. $\Phi_{C,n}(\Box^{n+1}A) \equiv \Box^n C$.

DÉMONSTRATION

1. Par induction sur comp(A). Le cas où comp(A)=0 est immédiat. Si $0<\mathrm{comp}(A)\leq n$ et $\mathrm{comp}(B)<\mathrm{comp}(A)$, alors, par l'hypothèse d'induction, $\Phi_{n-1}(B) \equiv \Phi_n(B) \equiv B$. Donc, $\Phi_n(\Box B) \equiv \Box\Phi_{n-1}(B) \equiv \Box\Phi_n(B)$, et $\Phi_n(\Diamond B) \equiv \Diamond\Phi_{n-1}(B) \equiv \Diamond\Phi_n(B)$. Dès lors, $\Phi_n(A) \equiv A$, par la proposition 1.
2. Immédiat, par induction sur n.

(3) $\Box^n A$ est la formule obtenue en préfixant n $\Box$ à A.

DÉFINITION

Si Γ est un ensemble de formules, A est une formule Γ-*minimale* ssi A est dans Γ et $\mathrm{comp}(B) \geq \mathrm{comp}(A)$, pour toute formule B de Γ.

PROPOSITION 3

Si A est Γ-minimale, alors $\Phi_{\Gamma,C}(A) \equiv A$.

DÉMONSTRATION

Si A est Γ-minimale, ni B ni $\neg B$ ne sont dans Γ si $\mathrm{comp}(B) < \mathrm{comp}(A)$. En ce cas, $\Phi_{\Gamma,C}(\Box B) \equiv \Box \Phi_{\Gamma,C}(B)$ et $\Phi_{\Gamma,C}(\Diamond B) \equiv \Diamond \Phi_{\Gamma,C}(B)$. Donc, par la proposition 1, $\Phi_{\Gamma,C}(A) \equiv A$.

DÉFINITION

Une transformation normale Φ *interprète* le système S ssi $S \vdash \Phi(A)$ lorsque $S \vdash A$, pour toute formule A.
Une induction sur la structure des démonstrations établit la

PROPOSITION 4

Si $S \vdash \Phi(A)$, pour tout axiome propre A de S; et si $S \vdash \Phi(C)$ lorsque $S \vdash P_1, \ldots, S \vdash P_n$ et $S \vdash \Phi(P_1), \ldots, S \vdash \Phi(P_n)$, pour toute instance de règle propre

$$\frac{P_1 \ \ldots \ P_n}{C}$$

de S, alors Φ interprète S.

3. *Les systèmes modaux*

3.1. *K et ses extensions*

3.1.1. LE SYSTÈME K

En logique modale, le système de base est appelé K, pour «Kripke». Les axiomes en sont:

— les formules définissant $\Diamond$ en termes de $\Box$ et $\neg$:

$$\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$$

— les formules:

$$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$$

La seule règle propre est la règle dite de «nécessitation»:

$$\frac{A}{\Box A}$$

Nous montrons[4] maintenant que le système K est fermé sous la règle L:

THÉORÈME 1

Si $K \vdash \Box A \rightarrow A$, alors $K \vdash A$.

DÉMONSTRATION

Supposons que $K \vdash \Box A \rightarrow A$ et fixons $n \geq \text{comp}(A)$. Les axiomes et règles de K entraînent: $K \vdash \Box^{n+1} A \rightarrow A$. En appliquant la proposition 4, on montre, par induction sur n, que $\Phi_{\top,n}$ interprète K. Par conséquent, $K \vdash \Phi_{\top,n}(\Box^{n+1}A \rightarrow A)$, ce qui est la même chose que $K \vdash \Box^n \top \rightarrow A$ (proposition 2). Mais comme $K \vdash \Box^n \top$, il s'ensuit, par modus ponens que A est un théorème de K.

3.1.2. LES EXTENSIONS DE K

On remarquera que la démonstration précédente s'applique également à toutes les extensions de K que $\Phi_{\top,n}$ interprète. Ainsi, par exemple, la règle L est redondante dans K plus le schéma d'axiomes $\Diamond A \rightarrow \Box A$. Considérons, d'autre part, les schémas célèbres:

T $\Box A \rightarrow A$
D $\Box A \rightarrow \Diamond A$

[4] L'intérêt de cette preuve réside dans son caractère syntaxique. Car, dans le cas du système K, il est aisé de prouver cela en construisant des modèles de Kripke.

4 $\Box A \to \Box\Box A$
5 $\Diamond A \to \Box\Diamond A$
B $A \to \Box\Diamond A$

Ces schémas sont utilisés pour construire les extensions de K les plus couramment étudiées. Nous constatons que les systèmes obtenus à l'aide de ces schémas ne sont en général par fermés pour la règle L.

Plus précisément, les systèmes KT, KD, $K4$, $K5$ et KB possèdent des théorèmes de la forme $\Box A \to A$ tels que A n'y est pas un théorème. En voici des exemples:

— $KT \vdash \Box\bot \to \bot$, mais $KT \nvdash \bot$
— $KD \vdash \Box\bot \to \bot$, mais $KD \nvdash \bot$
— $K4 \vdash \Box(\Diamond\top \to \Diamond\Box\bot) \to (\Diamond\top \to \Diamond\Box\bot)$, mais $K4 \nvdash \Diamond\top \to \Diamond\Box\bot$
— $K5 \vdash \Box\Box\bot \to \Box\bot$, mais $K5 \nvdash \Box\bot$
— $KB \vdash \Box\Box\bot \to \Box\bot$, mais $KB \nvdash \Box\bot$

Si on ajoute la règle L au système $K4$, on obtient le système G —G, comme «Gödel»— qui peut également être axiomatisé en ajoutant à K le schéma formalisant la règle L: $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$. Solovay a montré que le système G décrit exactement la notion de démonstrabilité de l'arithmétique de Peano (voir Solovay [5] et Boolos [1]).

3.2. *Les sous-systèmes de K: E et ses extensions*

Le système faible E a comme axiomes propres les formules définissant $\Diamond$:

$$\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$$

Il a pour règle propre la règle de Scott:

$$\frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}$$

Le système «monotone» M est l'extension de E obtenue en remplaçant la règle de Scott par la règle:

$$\frac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$$

PROPOSITION 5

1. *Si pour toutes formules A et B, B est dans Γ lorsque A est dans Γ et que $E \vdash A \leftrightarrow B$, alors $\Phi_{\Gamma,C}$ interprète E.*
2. *Si $n \geq 0$, $\Phi_{C,n}$ interprète M.*

DÉMONSTRATION

1. $\Phi_{\Gamma,C}(\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A)$ est $\neg C \leftrightarrow \neg C$ ou $\Diamond\Phi_{\Gamma,C}(A) \leftrightarrow \neg\Box\neg\Phi_{\Gamma,C}(A)$, selon que $\neg A$ est dans Γ ou non.
   Par la proposition 4, il suffit donc de vérifier que $E \vdash A \leftrightarrow B$ et que $E \vdash \Phi_{\Gamma,C}(A) \leftrightarrow \Phi_{\Gamma,C}(B)$ entraînent $E \vdash \Phi_{\Gamma,C}(\Box A) \leftrightarrow \Phi_{\Gamma,C}(\Box B)$. Or, cela découle de la définition de $\Phi_{\Gamma,C}$ et du fait que A est, par hypothèse, dans Γ ssi B est dans Γ.

2. $M \vdash \Phi_{C,n}(\Box A \rightarrow \Box B)$ équivaut à $M \vdash C \rightarrow C$ ou à $M \vdash \Box\Phi_{C,n-1}(A) \rightarrow \Box\Phi_{C,n-1}(B)$. Ceci permet à nouveau d'appliquer la proposition 4 pour obtenir, par induction sur n, le résultat cherché.

THÉORÈME 2

La règle L est redondante dans E: si $E \vdash \Box A \rightarrow A$, alors $E \vdash A$.

DÉMONSTRATION

Supposons que $E \vdash \Box A \rightarrow A$. Soit Γ l'ensemble des formules B telles que $E \vdash A \leftrightarrow B$, et soit C une formule Γ-minimale. Dès lors $E \vdash A \leftrightarrow C$ et aussi $E \vdash \Box A \leftrightarrow \Box C$. Donc, $E \vdash \Box C \rightarrow C$ et $E \vdash \Phi_{\Gamma,\top}(\Box C \rightarrow C)$, par la proposition 5, c'est-à-dire $E \vdash \top \rightarrow C$, par la proposition 3. Donc, $E \vdash C$ et, par conséquent, aussi $E \vdash A$.

REMARQUES

La règle L n'est pas valable dans le système M, car on y démontre $\Box\Box\top \rightarrow \Box\top$. Mais on ne peut pas y démontrer $\Box\top$, ni en général $\Box A$, car la transformation normale $\Phi_\perp$ interprète M.
En revanche, si on ajoute au système M l'axiome $\Box\top$, alors, en utilisant la démonstration du théorème 1, on voit que la règle L y est redondante.

COROLLAIRE

Dans E on ne démontre, pour aucune formule A, $\Box A \leftrightarrow A$.

DÉMONSTRATION.

Si c'était le cas, alors, par le théorème 2, $E \vdash A$ et $E \vdash \Box A$, ce qui est impossible. Car la transformation normale $\Phi_\perp$ interprète E.
Ce corollaire se déduit également de la:

PROPOSITION 6

Dans M on ne démontre $\Box A \leftrightarrow A$ *pour aucun A.*

DÉMONSTRATION

En effet, si $M \vdash \Box A \leftrightarrow A$, alors $M \vdash \Box^{n+1}A \leftrightarrow A$, si $n \geq \mathrm{comp}(A)$. Donc, par la proposition 5, $M \vdash \Phi_{\top,n}(\Box^{n+1}A \leftrightarrow A)$. C'est-à-dire, $M \vdash \Box^n\top \leftrightarrow A$, par la proposition 2. D'autre part, comme $\Phi_{\perp,n}$ interprète également M, par la proposition 5, on a également $M \vdash \Box^n\perp \leftrightarrow A$. Par conséquent, $M \vdash \Box^n\perp \leftrightarrow \Box^n\top$. Appliquons finalement le fait que Ξ interprète M. On a donc que $M \vdash \top \leftrightarrow \perp$, ce qui est absurde car M est consistant.

Université catholique de Louvain

RÉFÉRENCES

[1] George Boolos, *The unprovability of consistency, An essay in modal logic*, Cambridge University Press, 1979.

[2] B.F. Chellas, *Modal logic: an introduction*, Cambridge University Press, 1980.

[3] M.H. Löb, *Solution of a problem of Leon Henkin*, The Journal of Symbolic Logic, Volume 20, 1955, pp. 115-118.

[4] Kurt Gödel, *Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls*, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, Volume 4, 1933, pp. 39-40. (Repris avec traduction anglaise dans *Kurt Gödel Collected Works*, Volume 1, Oxford University Press, pp. 300-302.)

[5] R. Solovay, *Provability interpretations of modal logic*, Israel Journal of Mathematics, Volume 25, 1976, pp. 287-304.