C. R. Acad. Sci. Paris, t. 329, Série I, p. 1033-1035, 1999
Logique/*Logic*

L'axiome de l'infini dans *NFU*

Marcel CRABBÉ

ISP-centre de logique, Université catholique de Louvain, 14, place Mercier, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique
Courriel : crabbe@risp.ucl.ac.be

(Reçu le 27 septembre 1999, accepté le 11 octobre 1999)

Résumé. Nous démontrons l'axiome de l'infini dans *NFU* sous l'hypothèse que le nombre des atomes est inférieur à celui des ensembles. © 1999 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

The axiom of infinity in NFU

Abstract. *We show that the axiom of infinity is true in NFU assuming that the number of atoms is less or equal than the number of sets.* © 1999 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

NFU est le système de théorie des ensembles *NF* de Quine avec éventuellement des atomes ou uréléments (*voir* [7], [5], [6] et/ou [4]).

Il est avantageux d'enrichir le langage usuel de *NFU* (qui n'est autre que le langage de la théorie des ensembles) en y adjoignant une constante $\varnothing$, représentant l'ensemble vide, et d'ajouter l'axiome $\forall x\ x \notin \varnothing$ aux axiomes propres de *NFU* – qui sont le schéma de compréhension stratifiable et l'axiome d'extensionnalité pour les objets non vides. Formellement, cette nouvelle théorie n'est qu'une extension conservatrice de l'ancienne. Mais d'un point de vue informel, les objets qui peuplent l'univers peuvent y être envisagés soit comme des ensembles, soit comme des atomes. Les atomes sont des objets n'ayant aucun élément et l'axiome d'extensionnalité faible garantit que tout ensemble, autre que l'ensemble vide, est non vide.

AI désigne l'axiome de l'infini tel qu'il s'écrit normalement dans *NFU* : il y a une famille d'ensembles contenant l'ensemble vide et fermée pour l'opération qui consiste à ajouter un élément à un ensemble, telle que cette famille soit distincte de l'univers.

Rappelons le sens de certaines abréviations courantes : V pour l'univers, à savoir l'ensemble des x tels que $x = x$; U pour l'ensemble des atomes, à savoir l'ensemble des x tels que, $\forall y\ y \notin x \wedge x \neq \varnothing$; $\mathcal{P}(a)$ pour l'ensemble des sous-*ensembles* de a, à savoir l'ensemble des x tels que $x \subseteq a \wedge (\exists v\ v \in x \vee x = \varnothing)$; $|X|$ pour le cardinal de X, c'est-à-dire l'ensemble de tous les ensembles équipotents à X ; $\mathrm{USC}(X)$ pour l'ensemble des singletons inclus dans X ; $T|X|$ pour $|\mathrm{USC}(X)|$.

Note présentée par Jean-Yves GIRARD.

Nous avons donc que $x \notin U$ si et seulement si $\exists y\ y \in x \vee x = \varnothing$ si et seulement si $x \in \mathcal{P}(V)$, autrement dit $\mathcal{P}(V)$ est l'ensemble de tous les ensembles et $V = \mathcal{P}(V) \cup U$.

THÉORÈME

$$NFU + |U| \leq |\mathcal{P}(V)| \vdash AI.$$

Démonstration. – On généralise la preuve de *AI* dans *NF*, due à Specker [8]. En réalité, celui-ci prouve la négation de l'axiome du choix et en déduit *AI* comme corollaire. Examinons d'abord ce que devient cette réfutation de l'axiome du choix dans *NF* si on l'applique directement à établir l'axiome de l'infini.

Il s'agit de l'argument d'arithmétique élémentaire suivant qui sera traduit ensuite dans *NF*. Appelons « tour de puissances » tout naturel qui peut être mis sous la forme $2^{\cdot^{\cdot^{2^0}}}$ et notons t_n la plus grande tour de puissances qui est $\leq n$ et $h(n)$ la hauteur de t_n.

Comme les inégalités $\ell \leq n < 2^\ell$ entraînent $2^\ell \leq 2^n < 2^{2^\ell}$, il s'ensuit que $h(n) + 1 = h(t_n) + 1 = h(2^{t_n}) = h(2^n)$. Par conséquent, la parité de $h(n)$ n'est pas la même que celle de $h(2^n)$.

Pour transposer [1] cela dans *NF*, commençons par définir $2^{|X|}$ de façon que $2^{|X|} = |Y|$ soit stratifiable en donnant un même type à X et à Y. Pour cela posons [2] $2^{|X|} = T^{-1}(|\mathcal{P}(X)|)$, étant entendu que $T^{-1}(|\mathcal{P}(X)|) = \varnothing$ si $|\mathcal{P}(X)| \not\leq T|V|$. On peut par conséquent définir $h(k)$ comme étant le cardinal de l'ensemble $\{0, 2^0, 2^{2^0}, \ldots\} \cap \{\ell \mid \ell \leq k\}$.

Supposons ensuite que le cardinal de l'univers est fini et soit n le nombre $T|V| = |\mathrm{USC}(V)|$. Alors $2^n = |\mathcal{P}(V)| = |V|$. En utilisant $2^k = \varnothing$ plutôt que $|V| < 2^k$ (ce qui est toujours faux dans *NF*), nous pouvons adapter l'argument ci-dessus pour obtenir finalement que $h(T|V|)$ et $h(|V|)$ n'ont pas la même parité. Mais, d'autre part, on montre que $h(T|V|) = T(h(|V|))$, ce qui est contradictoire car k et Tk sont toujours congrus modulo 2.

Si nous voulons maintenant comparer $h(n)$ et $h(2^n + k)$, pour $k \leq 2^n$, la preuve précédente doit être modifiée comme suit :

– si $\ell \leq n < 2^\ell$, alors $\ell \leq n < n + 1 \leq 2^\ell$. Donc, $2^\ell \leq 2^n \leq 2^n + k \leq 2^{n+1} \leq 2^{2^\ell}$;
– si $2^n + k = 2^{2^{t_n}}$, alors $h(n) + 2 = h(t_n) + 2 = h(2^{2^{t_n}}) = h(2^n + k)$;
– si $2^n + k < 2^{2^{t_n}}$, alors $h(n) + 1 = h(t_n) + 1 = h(2^{t_n}) = h(2^n + k)$.

Donc $h(n)$ et $h(2^n + k)$ ne sont pas congrus modulo 3.

Pour appliquer cela à *NFU*, supposons que *AI* est faux et que $k = |U| \leq |\mathcal{P}(V)|$. Soit comme précédemment $n = T|V| = |\mathrm{USC}(V)|$. Alors $\mathcal{P}(V) = 2^n$ et $|V| = |\mathcal{P}(V) \cup U| = 2^n + k$.

Par conséquent, en utilisant les mêmes méthodes que dans le cas de *NF*, on prouve que $h(T|V|)$ et $h(|V|)$ ne sont pas congrus modulo 3. Mais on démontre que $h(T|V|) = T(h(|V|))$ et donc que $h(|V|)$ et $h(T|V|)$ sont congrus modulo 3. □

Boffa [2] a démontré que $NFU + AI + |U| \leq |\mathcal{P}(V)|$ interprète *NF* en construisant dans ce système une bijection entre $|V|$ et $|\mathcal{P}(V)|$. Le théorème que nous venons de prouver permet de supprimer la référence à *AI* et d'obtenir, par conséquent, les

COROLLAIRE 1

$$NFU + |U| \leq |\mathcal{P}(V)| \vdash |V| = |\mathcal{P}(V)|.$$

COROLLAIRE 2. – *Le système $NFU + |U| \leq |\mathcal{P}(V)|$ est équiconsistant avec NF.*

Le corollaire 1 peut encore être démontré, dans l'arithmétique cardinale sans axiome du choix, comme ceci. Soient $\mu = |V|$ et $\kappa = |U|$. Puisque $|\mathcal{P}(V)| = 2^{T\mu}$, nous devons prouver que $\mu = 2^{T\mu} + \kappa = 2^{T\mu}$, sous l'hypothèse que $\kappa \leq 2^{T\mu}$. Il suffira d'établir $2^{T\mu} + 2^{T\mu} = 2^{T\mu}$.

Si $\kappa \leq 2^{T\mu}$, alors μ est infini, par le théorème. Dans *NF* et *NFU* – contrairement à c e qui se passe en théorie des types – l'axiome de l'infini implique que l'univers est Dedekind-infini car $\aleph_0 \leq 2^{2^{T^2\mu}} \leq \mu$. Par conséquent, $T\mu = T\mu + 1$. Ce qui permet de conclure ainsi : $2^{T\mu} = 2^{T\mu+1} = 2^{T\mu} + 2^{T\mu}$. □

Remarque. – En raison du corollaire 1, on peut pratiquement reproduire telle quelle la preuve de la négation de l'axiome du choix de Specker dans $NFU + |U| \leq |\mathcal{P}(V)|$. On peut aussi réfuter directement l'axiome du choix, en compliquant légèrement la preuve du théorème.

M. Boffa nous a fait remarquer à ce propos qu'il suit de [1] que, non seulement la négation de l'axiome du choix, mais toute « propriété typée » (au sens de *NFU*) de l'univers est prouvable dans $NFU + |V| = |\mathcal{P}(V)|$, si elle l'est dans *NF*.

---

[1] *Voir* [3] pour une analyse détaillée de la manière de transférer ce genre d'argument dans la théorie des types ou dans *NF* et *NFU*.

[2] C'est la définition de [3]. Celle de [8], qui est moins générale, fonctionne également.

Références bibliographiques

[1] Boffa M., Sets Equipollent to their Power Set in *NF*, J. Symb. Logic 40 (1975) 149–150.
[2] Boffa M., The Consistency Problem for *NF*, J. Symb. Logic 42 (1977) 215–220.
[3] Crabbé M., Typical Ambiguity and the Axiom of Choice, J. Symb. Logic 49 (1984) 1074–1078.
[4] Crabbé M., On *NFU*, Notre-Dame J. Formal Logic 33 (1992) 112–119.
[5] Forster Th., Set Theory with a Universal Set, Clarendon Press, Oxford, 1995.
[6] Holmes M.R., Elementary Set Theory with a Universal Set, Academia-Bruylant, Louvain-la-Neuve, 1998.
[7] Jensen R.B., On the Consistency of a Slight *(?)* Modification of *NF*, Synthese 19 (1968–69) 250–263.
[8] Specker E., The Axiom of Choice in Quine's "New Foundations for Mathematical Logic", Proc. N.A.S. 39 (1953) 972–975.