La question de la cohérence de NF *

Marcel Crabbé

Résumé

NF est la théorie des ensembles de Quine. La cohérence de cette théorie n'a pas encore été démontrée. Cependant certains résultats récents permettent d'examiner ce problème dans un nouvel éclairage. Dans une première section, nous présentons le système en modifiant la notion habituelle de stratification. La seconde section réduit NF à une extension de la théorie simple des types. Le théorème principal de cette section est dû à Specker. La démonstration qu'il en a faite peut être simplifiée aujourd'hui. La troisième section, tout en préparant la quatrième, signale la cohérence d'un fragment de NF. Si on ajoute un axiome assez naturel à ce fragment, on obtient l'entièreté de NF. C'est à démontrer cela que s'applique la quatrième section. Enfin, nous terminons par quelques conclusions que l'on peut tirer, quant à la cohérence de NF, de ces résultats.

Introduction

NF est la théorie des ensembles de Quine introduite dans l'article « New-Foundations for Mathematical Logic » (Q.1). La cohérence « relative » de NF n'a pas encore été établie. C'est là un des problèmes les plus ardus posé par la logique mathématique. La difficulté provient de ce qu'on ne connaît

*Ce texte, rédigé en 1975, est une version française, légèrement postérieure, de « Da Coerência de N.F. ». L'article original n'a paru qu'en 1980, dans l'ouvrage collectif *Filosofia da Linguagem e Lógica*, publié sous la direction de Raul Landim et Guido de Almeida. `logoi.be/crabbe/textes/coerenciaNF.pdf` pas de modèle intuitif de NF. Contrairement à ce qui s'est passé pour ZF, on n'a pas voulu, en inventant NF, décrire une structure donnée. Les motivations semblent avoir été essentiellement d'ordre syntaxique : NF a voulu être la théorie des types sans avoir la lourdeur que comportent l'utilisation de diverses sortes de variables et les restrictions sur les règles de logiques.

On verra dans cet article que NF est une théorie beaucoup plus puissante que la théorie des types. Ce fait sera mis en évidence par la présentation de certains résultats, dont quelques-uns sont récents, qui auront pour effet de réduire le problème mystérieux de la cohérence de NF à des questions plus abordables.

Section 1

Présentation de NF

Le langage utilisé est un langage de théorie des ensembles. Il ne contient qu'un prédicat non logique, le prédicat binaire $\in$. Une *stratification* d'une formule φ est une fonction σ qui associe à chaque occurrence de variable dans φ un entier strictement positif tel que :

- si $x \in y$ est une sous-formule de φ, $\sigma(y) = \sigma(x) + 1$;
- si $x = y$ est une sous-formule de φ, $\sigma(x) = \sigma(y)$;
- toutes les occurrences d'une variable liées par un même quantificateur ont la même valeur selon σ.

Une formule est *stratifiée* s'il existe une stratification pour cette formule [1]. Voici quelques exemples de formules stratifiées :

$x \in x$, $x = x$, $\exists y\,(x \in y \wedge y \in x)$, toute formule sans quantificateur, toute combinaison propositionnelle de formules stratifiées, $\exists y \forall x\,(x \in y \leftrightarrow x = x)$, $\exists y \forall x\,(x \in y \leftrightarrow \neg x \in z)$.

1. La notion de stratification définie ici diffère de la notion habituelle. Les deux notions coïncident sur les énoncés. Une formule est stratifiée au sens habituel si et seulement si sa clôture universelle est stratifiée. La nouvelle notion est introduite pour des raisons de commodité. Elle est plus générale que l'ancienne. Mais elle ne modifie pas le système NF.

Les formules suivantes ne sont pas stratifiées :

$\exists x\, x \in x$, $\forall x \exists y\, (x = y \wedge x \in y)$, $\exists y \forall x\, (x \in y \leftrightarrow \neg x \in x)$, $\exists y \forall x\, (x \in y \leftrightarrow \forall z (x \in z \leftrightarrow \neg z \in x))$.

Les axiomes de NF sont :

1° l'axiome d'extensionnalité : $\forall x \forall y\, (\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$;
2° les axiomes de compréhension, à savoir, les formules *stratifiées* de la forme : $\exists y \forall x\, (x \in y \leftrightarrow \varphi)$ (il est entendu, comme c'est l'usage, que y n'est pas libre dans φ).

Nous renvoyons le lecteur qui désire avoir une idée de la puissance de NF à l'ouvrage Q.2.

Section 2

NF *et la théorie des types*

Si φ est une formule du langage de NF et si σ est une stratification pour φ, on obtient une formule φ^σ du langage de la théorie simple des types (TT) [2] en remplaçant dans φ les occurrences des variables x par $x^{\sigma(x)}$. Réciproquement, si φ est une formule du langage de TT, on peut trouver une variante ψ de φ telle qu'aucune occurrence liée de x^i ne se trouve dans le champ d'un quantificateur $\forall x^j$ ou $\exists x^j$, avec $i \neq j$. En remplaçant, dans ψ, x^i par x, on obtient une formule stratifiée du langage de NF.

Pour faciliter la lisibilité, on se permettra souvent d'identifier les formules stratifiées avec celles de la théorie des types. Cela entraînera difficilement des confusions et facilitera l'expression des résultats.

Dans NF on peut démontrer des énoncés non stratifiés. Par exemple, on y démontre $\exists x\, x \in x$ de la façon suivante :

2. Chaque variable du langage de NF peut être identifiée à un couple : la $n^{ième}$ variable est le couple $\langle v, n \rangle$. Les variables de TT sont alors des triples : $\langle v, n, i \rangle$ est la $n^{ième}$ variable de type i. On conviendra tacitement que si x est la variable $\langle v, n \rangle$, x^i est la variable $\langle v, n, i \rangle$.

$$\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x = x) \to (y \in y \leftrightarrow y = y)\,;$$

$$\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x = x) \to y \in y\,;$$

$$\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x = x) \to \exists x\, x \in x\,;$$

$$\exists y \forall x\,(x \in y \leftrightarrow x = x) \to \exists x\, x \in x\,;$$

$$\exists x\, x \in x.$$

Il se pourrait cependant que dans NF on ne puisse pas démontrer d'énoncés stratifiés qui ne seraient pas déjà démontrables dans TT. Cela entraînerait l'équiconsistance de NF et de TT, puisque tous les théorèmes de TT sont évidemment démontrables dans NF. Il n'en est rien. Specker a en effet démontré, dans NF, l'axiome de l'infini, c'est-à-dire l'énoncé stratifié suivant :

$$\begin{aligned}&\exists y \exists x\,(\exists z(\forall v\, \neg v \in z \wedge z \in x) \wedge \forall z\,(z \in x \to \\ &\forall t(\neg t \in z \to \forall v\,(\forall w(w \in v \leftrightarrow w \in z \vee t = w) \to v \in x))) \wedge \neg y \in x).\end{aligned}$$

Il a également démontré (dans S.1) la négation d'un énoncé stratifié qui exprime l'axiome du choix. Ces énoncés ne sont évidemment pas des théorèmes de TT. Il faut donc étendre TT si l'on souhaite récupérer NF dans une théorie des types.

Ajoutons aux axiomes de TT les énoncés stratifiés de la forme $\varphi \leftrightarrow \varphi^+$, où φ^+ s'obtient à partir de φ en haussant les indices de types d'une unité. Le système qui en résulte est la théorie ambiguë des types (TAT). TAT est plus forte que TT, puisque un axiome comme $\forall x^1 \forall y^1 x^1 = y^1 \leftrightarrow \forall x^2 \forall y^2 x^2 = y^2$ n'est pas démontrable dans TT. TAT a en fait la même puissance que NF. Cela dérive du

Théorème (Specker) Pour tout énoncé stratifié φ,
$\mathsf{NF} \vdash \varphi$ si et seulement $\mathsf{TAT} \vdash \varphi$.

Corollaire 1 TAT est cohérent si et seulement si NF est cohérent.

Corollaire 2 Tout théorème stratifié de NF a une démonstration dont toutes les formules sont stratifiées.

Démonstration du théorème.

On montre que si φ est cohérent avec TAT, alors φ est cohérent avec NF.

Soit un modèle dénombrable[3] $\mathcal{A} = \langle A_1, \in_1, A_2, \in_2, ...\rangle$ tel que A_1 est infini, de $\mathsf{TAT}+\varphi$. Sous l'hypothèse du continu, $\mathcal{A}$ possède une extension élémentaire saturée $\mathcal{B} = \langle B_1, \in_1, B_2, \in_2, ...\rangle$ de puissance $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. La structure $\mathcal{B}^+ = \langle B_2, \in_2, ...\rangle$ est également saturée et de puissance $\aleph_1$. Or, pour tout énoncé ψ, $\mathcal{B}^+ \models \psi$ si et seulement si $\mathcal{B} \models \psi^+$ et $\mathcal{B} \models \psi^+$ si et seulement si $\mathcal{B} \models \psi$. Donc, $\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}^+$. Il s'ensuit que $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}^+$.

Soit f un isomorphisme de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^+$. On a, dans $\mathcal{B}$, $x \in_i y$ si et seulement si $f(x) \in_{i+1} f(y)$, pour x dans B_i et y dans B_{i+1}. On construit une structure $\mathcal{C} = \langle C, \in\rangle$ en posant : $C = B_1$ et $x \in y$ si et seulement si $x \in_1 f(y)$. Si $\psi(x_1, ..., x_n)$ est une formule stratifiée par une stratification σ, et si a_1, ... , a_n est une suite d'éléments de C, on peut montrer (par induction) que $\mathcal{B} \models \psi(f^{\sigma(x_1)-1}(a_1), ..., f^{\sigma(x_n)-1}(a_n))$ si et seulement si $\mathcal{C} \models \psi(a_1, ..., a_n)$, f^k étant la $k^{ième}$ itération de f. En particulier, $\mathcal{C}$ est un modèle de NF qui vérifie φ. ∎

La démonstration que nous venons de donner utilise, tout comme la démonstration originale de Specker (S.2), la notion de modèle. Il est possible d'obtenir un résultat plus fort de manière finitiste par la théorie de la démonstration. On peut décrire un procédé primitif récursif qui transforme la démonstration d'une formule stratifiée en une démonstration de la « même » formule dans TAT (C.1).

Section 3

Quelques fragments de NF

NF_n est le fragment de NF dont les axiomes de compréhension sont ceux que l'on peut stratifier à l'aide de n indices consécutifs. À NF_n correspond le

3. Le cardinal d'un modèle $\mathcal{A} = \langle A_1, \in_1, A_2, \in_2, ...\rangle$ est la somme des cardinaux des A_i.

fragment TT^n de TT et aussi TAT^n de TAT. Le théorème de Specker s'adapte à ces fragments :

Théorème 1 Si φ est stratifié, alors

$\mathsf{TAT}^n \vdash \varphi$ si et seulement si $\mathsf{NF}_n \vdash \varphi$.

Le langage de TT^n est le langage de TT. Il existe des fragments de TT sur des langages plus restreints. Soit TT_n la partie de TT que l'on peut développer dans le fragment de langage de TT qui ne comporte que les n premiers types. À TT_n correspond un fragment TAT_n de TAT. On a également :

Théorème 2 Si φ est stratifié à l'aide de n indices consécutifs, alors

$\mathsf{TAT}_n \vdash \varphi$ si et seulement si $\mathsf{NF}_n \vdash \varphi$.

Considérons les énoncés E_n de la théorie des types qui affirment qu'il y a au moins n objets de type 1 ($n \geq 1$). Quel que soit n, $E_n^+ \to E_n$ n'est pas démontrable dans TT. En effet, si un modèle de TT a 2^n objets de type 2, il en a exactement n de type 1. Cette remarque fait apparaître que dans tout modèle de TAT il y a une infinité d'éléments de type 1. La théorie des modèles de TT_3 ayant une infinité d'éléments de type 1, s'obtient à partir de TT_3 par l'addition pour chaque n ($n \geq 0$) de l'axiome E_n. Cette théorie est notée TT_3^∞.

Théorème 3 Si φ ne fait intervenir que les types 1, 2 et 3, alors

$\mathsf{TAT}_3 \vdash \varphi$ si et seulement si $\mathsf{TT}_3^\infty \vdash \varphi$.

Donc, par le théorème 2, on a :

Corollaire 1 Si φ est stratifié avec trois types consécutifs, alors

$\mathsf{NF}_3 \vdash \varphi$ si et seulement si $\mathsf{TT}_3^\infty \vdash \varphi$.

Corollaire 2 NF_3 est consistant.

La démonstration du théorème se trouve dans B. C. Le corollaire 2 a été démontré auparavant par Grichine (G. 1).

Section 4

Le fragment NF_4

Cette section est consacrée à la démonstration d'un théorème voisin [4] de celui de Grichine dans G.2. : NF est la même théorie que NF_3 plus l'axiome (F) :

$$\exists y \forall x\,(x \in y \leftrightarrow \exists z \forall v\,(v \in x \leftrightarrow z \in v)).$$

L'axiome (F) est un axiome de NF_4. On en déduira que NF a les mêmes théorèmes que NF_4. L'axiome (F) énonce que l'ensemble des ultrafiltres principaux de l'algèbre de Boole des ensembles existe. En vertu du théorème 1 de la section 3, il suffira de prouver le

Théorème

TT est la théorie TT^3 plus (les axiomes correspondants à) (F).

Ce résultat est intéressant en lui-même. Avant de pouvoir en donner la démonstration, il s'avère indispensable de fixer certaines notations. Tout d'abord, en général,
$t \in \{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ est une abréviation de l'expression $\varphi(t)$,
$t = \{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ est une abréviation de $\forall z\,(z \in \{\, x \mid \varphi(x) \,\} \leftrightarrow z \in t)$ et
$\{\, x \mid \varphi(x) \,\} \in t$ abrège $\exists y(y = \{\, x \mid \varphi(x) \,\} \wedge y \in t)$.
Le type assigné aux termes $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ est le successeur du type de x.
Les termes de la forme $\{\, G(x) \mid \varphi(x) \,\}$ sont des abréviations de
$\{\, v \mid \exists x\,(v = G(x) \wedge \varphi(x)) \,\}$.
Introduisons quelques termes particuliers nécessaires pour la suite :
$\mathsf{V} = \{\, x \mid x = x \,\}$,
$\mathsf{\Lambda} = \{\, x \mid x \neq x \,\}$,
$a \cap b = \{\, x \mid x \in a \wedge x \in b \,\}$,
$\mathsf{U}a = \{\, x \mid \exists y\,(x \in y \wedge y \in a) \,\}$, $\{a\} = \{\, x \mid x = a \,\}$,
$\mathsf{USC}(a) = \{\, \{x\} \mid x \in a \,\}$,
$\mathsf{F}(a) = \{\, x \mid a \in x \,\}$.
Tous ces termes sont définis dans TT^3, c'est-à-dire que pour chacun d'eux on a :

4. Dans G.2, Grichine démontre que $\mathsf{NF} = \mathsf{NF}_3 + \exists y \forall x\,(x \in y \leftrightarrow \exists z \forall v\,(v \in x \rightarrow z \in v))$. C'est-à-dire que NF a les mêmes théorèmes que la théorie NF_3 plus l'axiome qui affirme l'existence de l'ensemble des ensembles dont l'intersection est non vide.

$\mathsf{TT}_3 \vdash \exists y\,(y = \{\, x \mid \varphi(x) \,\})$.

Il suffit dans chaque cas d'utiliser un axiome de compréhension de TT^3.

Si $\exists y\,(y = \{\, x \mid \psi(x, z) \,\})$ et $\exists z\,(z = \{\, v \mid \chi(v) \,\})$ sont démontrables dans TT^3 ou dans TT^3+(F), il en va de même de la formule
$\exists y\,(y = \{\, x \mid \psi(x, \{\, v \mid \chi(v) \,\}) \,\})$. Ainsi, un axiome de compréhension comme $\exists y\,(y = \mathsf{USC}(F\{\mathsf{V}\}))$ qui fait intervenir 6 types est démontrable dans TT^3. C'est cette faculté qu'ont les termes de se composer qui est le principe directeur de la preuve de Grichine.

Les termes suivants sont construits selon cette technique :

$\mathsf{F}^0(a) = a$, $\mathsf{F}^{n+1}(a) = \mathsf{F}(\mathsf{F}^n(a))$;

$\mathsf{F}^n[a] = \{\, \mathsf{F}^n(x) \mid x \in a \,\}$;

$\mathsf{F}^{-n}[a] = \{\, x \mid \mathsf{F}^n(x) \in a \,\}$;

$\mathsf{F}^n = \mathsf{F}^n[\mathsf{V}]$.

Lemme 1 Pour tout n ($n \geq 0$), on a :
1. $TT^3 \vdash \exists y\,(y = \mathsf{F}^n(x))$;
2. $TT^3 + (\mathrm{F}) \vdash \exists y\,(y = \mathsf{F}^n[x])$;
3. $TT^3 + (\mathrm{F}) \vdash \exists y\,(y = \mathsf{F}^{-n}[x])$;
4. $TT^3 + (\mathrm{F}) \vdash \exists y\,(y = \mathsf{F}^n)$.

Démonstration

Le quatrième cas suit immédiatement du second. Pour les autres, on procède par récurrence. Les cas évidents où $n = 0$ seront omis.

1. Supposons qu'on ait déjà :

$TT^3 \vdash \exists y\,(y = \mathsf{F}^k(x))$.

On sait, en outre, que $\exists y\,(y = \mathsf{F}(x))$ est un axiome de compréhension de TT^3. Dès lors,

$TT^3 \vdash \exists y\,(y = \mathsf{F}^{k+1}(x))$.

2. On établit d'abord $\exists y\,(y = \{\, \mathsf{F}(v) \mid v \in x \,\})$ à partir du fait que $\exists y\,(y = \{\, v \mid v \cap z \neq \Lambda \,\})$ est un axiome de TT^3 et que $\{\, \mathsf{F}(v) \mid v \in x \,\} = \{\, v \mid v \cap \mathsf{USC}(x) \neq \Lambda \,\} \cap \mathsf{F}$. Ensuite, si l'on suppose que $TT^3 + (\mathrm{F}) \vdash \exists y\,(y = \mathsf{F}^k[x])$, on en déduit le résultat attendu car $\mathsf{F}^{k+1}[x] = \{\, F(v) \mid v \in \mathsf{F}^k[x] \,\}$.

3. Une démonstration semblable à celles qui précèdent s'obtient de ce que $\mathsf{F}^{-1}[x] = \{\, v \mid F(v) \in x \,\} = \mathsf{U}(\mathsf{U}(x \cap \mathsf{F}) \cap \mathsf{USC}(\mathsf{V}))$ et que $\mathsf{F}^{-(k+1)}[x] = \{\, v \mid \mathsf{F}^{k+1}(v) \in x \,\} = \{\, v \mid \mathsf{F}^k(v) \in \mathsf{F}^{-1}[x] \,\}$.

Lemme 2 Pour toute formule φ, sans quantificateur, du langage de TT, il existe une formule 2-typée [5] ψ, telle que :
$\mathsf{TT}^3 \vdash \varphi \leftrightarrow \psi^*$,
où ψ^* provient de la substitution aux variables de ψ de termes de la forme $\mathsf{F}^n(x)$.

Démonstration

Soit q le type maximum de ceux mentionnés dans φ. On obtient ψ^* en remplaçant dans φ
les sous-formules de la forme $x^{q-2p-1} \in y^{q-2p}$ par $\mathsf{F}^p(x) \in \mathsf{F}^p(y)$,
les sous-formules de la forme $x^{q-2(p+1)} \in y^{q-2p-1}$ par $\mathsf{F}^p(y) \in \mathsf{F}^{p+1}(x)$,
les sous-formules de la forme $x^{q-2p} = y^{q-2p}$ par $\mathsf{F}^p(x) = \mathsf{F}^p(y)$ et
les sous-formules de la forme $x^{q-2p-1} = y^{q-2p-1}$ par $\mathsf{F}^p(x) = \mathsf{F}^p(y)$. Notons que pour éviter des complications d'ordre syntaxique, il est utile de supposer que φ ne mentionne pas une même variable avec des types distincts, c'est-à-dire que si x^i et x^j ont des occurrences dans φ, alors $i = j$. Cette restriction n'affecte pas l'énoncé du lemme.

On montre par récurrence que :

$\mathsf{TT}^3 \vdash x \in y \leftrightarrow \mathsf{F}^k(x) \in \mathsf{F}^k(y)$;

5. Une formule du langage de TT est dite n-typée lorsque les types des variables de φ se trouvent dans un ensemble de n nombres consécutifs.

$\mathsf{TT}^3 \vdash x \in y \leftrightarrow \mathsf{F}^k(y) \in \mathsf{F}^{k+1}(x)\,;$

$\mathsf{TT}^3 \vdash x = y \leftrightarrow \mathsf{F}^k(x) = \mathsf{F}^k(y).$

On en tire que

$\mathsf{TT}^3 \vdash \varphi \leftrightarrow \psi^*.$

On obtient ψ à partir de ψ^* en y remplaçant les termes $\mathsf{F}^p(x^{q-2p})$ par x^q et $\mathsf{F}^p(x^{q-2p-1})$ par x^{q-1}.

Lemme 3 Pour toute formule φ du langage de TT, il existe une formule 3-typée ψ, telle que :
$\mathsf{TT}^3 + (\mathrm{F}) \vdash \varphi \leftrightarrow \psi^*$,
où ψ^* provient de la substitution aux variables de ψ de termes de la forme $\mathsf{F}^n(x)$ ou F^n.

Démonstration

Par induction. Il suffira de vérifier les cas non couverts par le lemme 2. Si φ est de la forme $\exists x^{q-2p}\, \varphi'(x^{q-2p})$, avec $p > 0$, et s'il existe une formule $\psi'(x^q)$, telle que :

$\mathsf{TT}^3 + (\mathrm{F}) \vdash \varphi'(x^{q-2p}) \leftrightarrow \psi'^*(\mathsf{F}^p(x)),$

alors, on pose ψ identique à $\exists x^q\,(x^q \in v^{q+1} \wedge \psi'(x^q))$ et ψ^* identique à $\exists x^q\,(x^q \in \mathsf{F}^p \wedge \psi'(x^q))$. Si φ a la forme $\exists x^{q-2p-1}\, \varphi'(x^{q-2p-1})$, avec $p > 0$, la démonstration est similaire. Les types qui apparaissent dans ψ sont $q-1$, q et $q+1$. ψ est donc 3-typée.

Démonstration du théorème

Il faudra démontrer tous les axiomes de compréhension de TT dans $\mathsf{TT}^3+(\mathrm{F})$. Soit

$\exists y \forall x\,(x \in y \leftrightarrow \varphi),$

un tel axiome. Par le lemme 3, il y a une formule 3-typée ψ telle que

$\mathsf{TT}^3 + (\mathrm{F}) \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \psi^*(\mathsf{F}^p(x)).$

L'examen de la construction de ψ à partir de φ révèle que si ψ mentionne les types $q-1$, q, $q+1$, le type de x est soit $q-1$, soit q. Le terme $\{\, x \mid \psi(x) \,\}$ est donc défini dans TT^3. Le terme $\{\, x \mid \psi^*(x) \,\}$ est défini dans $\mathsf{TT}^3 + (\mathrm{F})$, en vertu du lemme 1. Enfin, le terme $\{\, x \mid \psi^*(\mathsf{F}^p(x)) \,\}$, qui peut aussi s'écrire : $\mathsf{F}^{-p}[\{\, x \mid \psi^*(x) \,\}]$, est défini dans $\mathsf{TT}^3 + (\mathrm{F})$, par le lemme 1.

On a alors :

$$\mathsf{TT}^3 + (\mathrm{F}) \vdash \exists y \forall x\, (x \in y \leftrightarrow \psi^*(\mathsf{F}^p(x)))$$

et finalement :

$$\mathsf{TT}^3 + (\mathrm{F}) \vdash \exists y \forall x\, (x \in y \leftrightarrow \varphi(x)).$$

Conclusion

Nous donnons ici quelques exemples de propositions relatives au problème de la consistance de NF. Ces propositions se déduisent aisément des résultats qui viennent d'être exposés.

NF est cohérent si et seulement si TAT^4 est cohérent,

NF est cohérent si et seulement si $\mathsf{TAT}^3 + (\mathrm{F})$ est cohérent,

NF est cohérent si et seulement si TAT_4 est cohérent,

NF est cohérent si et seulement si il existe un modèle de TT^3, $\mathcal{A} = \langle A_1, \in_1, A_2 \in_2, A_3 \rangle$, et un isomorphisme $f : \langle A_1, \in_1, A_2 \rangle \cong \langle A_2 \in_2, A_3 \rangle$, tel que la classe $\{\, x \in A_2 \mid \exists z \in A_1 \forall v \in A_2\, (v \in_2 f(x) \leftrightarrow z \in_1 v)) \,\}$ est un « ensemble » de A_3.

Pour montrer cette dernière proposition, il suffit de noter qu'un tel modèle se prolonge en un modèle de TAT_4 si on y ajoute, comme quatrième niveau, la classe des ensembles de la forme $\{\, f(y) \mid y \in A_2 \text{ et } y \in_2 x \,\}$, pour x dans A_3, avec l'appartenance standard.

Références

(B.C) M. BOFFA & M. CRABBÉ, Les théorèmes 3-stratifiés de NF_3, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, série A, vol. 280 (1975), pp. 1657–1658.

(C.1) M. CRABBÉ, Types Ambigus, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, série A, vol. 280 (1975), pp. 1–3.

(G.1) V. N. GRICHINE, The consistency of a fragment of NF, Doklady Academii Nauk, vol. 189 (1969), n° 2, pp. 1387–1389.

(G.2) V. N. GRICHINE, Metod Stratifikatsii v Teorii Mnogestv (la méthode de stratification en théorie des ensembles), Thèse, Moscou, 1973.

(Q.1) W. V. O. QUINE, New-Foundations for Mathematical Logic, in From a logical point of view.

(Q.2) W. V. O. QUINE, Set Theory and itsLogic, Harper and Row, 1963.

(S. 1) E. SPECKER, The axiom of choice in Quine's "New-Foundations for Mathematical Logic", Proceedings of the National Academy of Science, vol. 39 (1953), pp. 9772–975.

(S. 2) E. SPECKER, Typical Ambiguity, in Logic Methodology and Philosophy of Science, Nagel ed., Stanford, 1962.