NF en un nombre fini d'axiomes*

par Marcel Crabbé

Les axiomes de NF sont :
extensionnalité :

$$\forall x \forall y\, (\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

compréhension (pour chaque ϕ « stratifiée ») :

$$\exists y \forall x\, (x \in y \leftrightarrow \phi).$$

On obtient NFU en affaiblissant l'extensionnalité :

$$\forall x \forall y\, (\exists v\, v \in x \to (\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y))$$

On va montrer que le schéma de compréhension peut être remplacé par les axiomes suivants :
1. $\exists y \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z = a \vee z = b)$ ($\{ a, b \}$ existe)
2. $\exists y \forall z\, (z \in y \leftrightarrow \exists u\, (u \in a \wedge \forall v\, (v \in z \leftrightarrow v = u)))$ ($USC(a)$ existe[(1)])
3. $\exists y \forall v \forall w\, (\langle \{ v \}, \{ w \} \rangle \in y \leftrightarrow \langle v, w \rangle \in a)$
4. $\exists y \forall v \forall w\, (\langle v, w \rangle \in y \leftrightarrow \langle w, v \rangle \in a)$
5. $\exists y \forall v \forall w \forall u\, (\langle v, w, u \rangle \in y \leftrightarrow \langle v, w \rangle \in a)$
6. $\exists y \forall v \forall w \forall u\, (\langle v, w, u \rangle \in y \leftrightarrow \langle v, u \rangle \in a)$
7. $\exists y \forall v \forall w\, (\langle v, w \rangle \in y \leftrightarrow w \in a)$
8. $\exists y \forall v \forall w\, (\langle \{ v \}, w \rangle \in y \leftrightarrow v \in w)$
9. $\exists y \forall z\, (z \in y \leftrightarrow \exists u\, (z \in u \wedge u \in a))$ ($U(a)$ existe[(1)])
10. $\exists y \forall z\, (z \in y \leftrightarrow \neg z \in a)$ ($\overline{a}$ existe)
11. $\exists y \forall z\, (z \in y \leftrightarrow \exists u\, (\langle u, z \rangle \in a))$

Le système formé de ces axiomes et de l'extensionnalité (affaiblie) sera désigné par *Nf* (*NfU*). Les axiomes de *Nf* (*NfU*) sont des théorèmes de *NF* (*NFU*), de par la définition du $n-$uple ci-dessous.

Les $n-$uples

$\langle a, b \rangle$ est une abréviation pour $\{ \{ a \} \{ a, b \} \}$.
$\langle a_1, b_1, \ldots, b_{n+1} \rangle$ est une abréviation pour $\{ \{ a \}^{2n}, \langle b_1, \ldots, b_{n+1} \rangle \}$ ($n > 0$, $\{ a \}^0$ est a, $\{ a \}^{k+1}$ est $\{ \{ a \}^k \}$).
On conviendra que $\langle a \rangle$ est a.

Par les axiomes 1 et 9, $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ existe pour tout $a_1, \ldots, a_n$ ($n > 0$).
On montre facilement, par récurrence sur k, que

$$(P) \qquad \langle a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{q+1} \rangle = \langle \{ a_1 \}^{2q}, \ldots, \{ a_k \}^{2q}, \langle b_1, \ldots, b_{q+1} \rangle \rangle.$$

---

* Séminaire interuniversitaire de logique. Séance du 8 novembre 1973.

(1) En toute rigueur, cette abréviation n'a de sens que si on a la pleine extensionnalité. Les abus qui en sont faits dans la suite peuvent être corrigés d'une manière évidente.

Lemme d'existence Si ϕ est une formule stratifiée, si m est supérieur à l'indice le plus grand utilisé pour stratifier ϕ, si k_i est le nombre assigné à x_i lorsque x_i est une variable libre de ϕ, alors

$$\exists y \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (\langle \{ x_1 \}^{m-k_1}, \ldots, \{ x_n \}^{m-k_n} \rangle \in y \leftrightarrow \phi)$$

est démontrable dans *Nf* (*NfU*), pour tout n ($n > 0$).

Démonstration.

On peut supposer que les formules $a \in b$, $a \in x_i$, $a = b$ n'apparaissent pas dans ϕ (on remplace $a \in b$ par $\exists v \, (v = a \wedge v \in b)$, $a \in x_i$ par $\exists v \, (v = a \wedge v \in x_i)$, $a = b$ par $\exists v \, (v = a \wedge v = b)$).

On suppose également que ϕ est construite à l'aide des constantes $\in$, $=$, $\neg$, $\vee$, $\exists$.

La démonstration est une induction sur la construction de ϕ.

1. ϕ est $x_i \in x_j$.

Par l'axiome 8, on dispose d'un α tel que :

$$\forall x_i \forall x_j \, (\langle \{ x_i \}, x_j \rangle \in \alpha \leftrightarrow x_i \in x_j)$$

Par l'axiome 4, on peut supposer que $i < j$.

Si $j \neq n$, on a, par l'axiome 3, un β tel que :

$$\forall x_i \forall x_j \, (\langle \{ \{ x_i \} \}^{m-k_j+2(n-j-1)}, \{ x_j \}^{m-k_j+2(n-j-1)} \rangle \in \beta \leftrightarrow x_i \in x_j)$$

Alors, par l'axiome 5, P et le fait que $k_j = k_i + 1$, on a un γ tel que :

$$\forall x_i \forall x_j \ldots \forall x_n \, (\langle \{ x_i \}^{m-k_i}, \{ x_j \}^{m-k_j}, \ldots, \{ x_n \}^{m-k_n} \rangle \in \gamma \leftrightarrow x_i \in x_j)$$

(quand $j = n$, on a la même chose par l'axiome 3)

Si $j \neq i + 1$, on utilise la définition du $n-$uple pour obtenir, après $j - i - 1$ applications de l'axiome 6, un α tel que :

$$\forall x_i \ldots \forall x_n \, (\langle \{ x_i \}^{m-k_i}, \ldots, \{ x_n \}^{m-k_n} \rangle \in \alpha \leftrightarrow x_i \in x_j)$$

Finalement, si $i \neq 1$, on utilise à nouveau la définition du $n-$uple et, après $i - 1$ applications de l'axiome 7, on a le résultat annoncé.

2. ϕ est $x_i \in a$.

On a, par la logique,

$$\exists y \forall x_i \, (x_i \in y \leftrightarrow x_i \in a)$$

Si $i \neq n$, on a, par $m - k_i + 2(n - i - 1)$ applications de l'axiome 2, un α tel que :

$$\forall x_i \, (\langle \{ x_i \}^{m-k_i+2(n-i-1)} \rangle \in \alpha \leftrightarrow x_i \in a)$$

Par les axiomes 7 et 4 et par P, on a un β tel que :

$$\forall x_i \ldots \forall x_n \, (\langle \{ x_i \}^{m-k_i}, \ldots, \{ x_n \}^{m-k_n} \rangle \in \beta \leftrightarrow x_i \in a)$$

Enfin, si $i \neq 1$ on procède comme dans le cas précédent.

3.[2] ϕ est $x_i = x_i$.
On a, par les axiomes 1, 9 et 10, un α tel que :

$$\forall x_i\, (x_i \in \alpha \leftrightarrow x_i = x_i)$$

Cet ensemble est unique, on le notera V. La démonstration se poursuit comme dans le cas précédent.
4. Si ϕ est $x_i = x_j$ $(j \neq i)$.
Comme $x_i = x_j$ ssi $\langle x_i, x_j \rangle = \{\{x_i\}\} = \{\{x_j\}\}$, on a, par l'axiome 2 et l'existence de V, un α tel que :

$$\forall x_i \forall x_j\, (\langle x_i, x_j \rangle \in \alpha \leftrightarrow x_i = x_j)$$

On achève comme dans le premier cas.
5. ϕ est $x_i = a$.
On a, par l'axiome 1, un α tel que :

$$\forall x_i\, (x_i \in \alpha \leftrightarrow x_i = a)$$

On achève comme dans le second cas.
6. ϕ est $\psi \vee \chi$.
Comme ϕ est stratifiée, ψ et χ le sont également. L'indice le plus grand utilisé pour $\psi \vee \chi$ est supérieur à ceux utilisés pour ψ et χ. On a donc, par l'hypothèse d'induction, un α et un β tels que :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\, (\langle \{x_1\}^{m-k_1}, \ldots, \{x_n\}^{m-k_n} \rangle \in \alpha \leftrightarrow \psi)$$
$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\, (\langle \{x_1\}^{m-k_1}, \ldots, \{x_n\}^{m-k_n} \rangle \in \beta \leftrightarrow \chi)$$

Donc,

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\, (\langle \{x_1\}^{m-k_1}, \ldots, \{x_n\}^{m-k_n} \rangle \in \alpha \cup \beta \leftrightarrow \psi \vee \chi) \qquad \text{(axiomes 1 et 9)}$$

7. ϕ est $\neg\psi$.
Comme ϕ est stratifiée, ψ l'est aussi et avec les mêmes indices. On a le résultat par l'hypothèse d'induction et l'axiome 10.
8. ϕ est $\exists v\, \psi$.
ϕ étant stratifiée, ψ l'est aussi et avec les mêmes indices (on peut supposer que v a une occurrence libre dans ψ). On a donc, par l'hypothèse d'induction, un α tel que :

$$\forall v \forall x_1 \ldots \forall x_n\, (\langle \{v\}^{m-k}, \{x_1\}^{m-k_1}, \ldots, \{x_n\}^{m-k_n} \rangle \in \alpha \leftrightarrow \psi)$$

[2] Si on se trouve dans *Nf*, on peut sauter les trois cas qui suivent en utilisant la définition extensionnelle de l'égalité :

$$x = y \leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y)$$

Et donc

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \, (\exists v \, (\langle \{ \, v \, \}^{m-k}, \{ \, x_1 \, \}^{m-k_1}, \ldots, \{ \, x_n \, \}^{m-k_n} \rangle \in \alpha) \leftrightarrow \exists v \, \psi)$$

Par les axiomes 2, 7 et 4, on a un β tel que :

$$\forall v \forall w \, (\langle \{ \, v \, \}, \{ \, w \, \} \rangle \in \beta \leftrightarrow v \in \mathit{USC}^{m-k+2(n-1)}(V))$$

Dès lors (axiomes 1, 9, 10),

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \, (\exists v \, (\langle v, \langle \{ \, x_1 \, \}^{m-k_1}, \ldots, \{ \, x_n \, \}^{m-k_n} \rangle \rangle \in \alpha \cap \beta) \leftrightarrow \exists v \, \psi)$$

Donc, par l'axiome 11, il y a un γ tel que :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \, (\langle \{ \, x_1 \, \}^{m-k_1}, \ldots, \{ \, x_n \, \}^{m-k_n} \rangle \in \gamma \leftrightarrow \exists v \, \psi)$$

c.q.f.d.

Théorème Si ϕ est stratifiée, alors

$$\exists y \forall x \, (x \in y \leftrightarrow \phi)$$

est démontrable dans *Nf* (*NfU*).

Démonstration.

Par le lemme, on a un α tel que :

$$\forall x \, (\langle \{ \, x \, \}^{m-k} \rangle \in \alpha \leftrightarrow \phi)$$

Dès lors,

$$\forall x \, (x \in U^{m-k}(\alpha \cap \mathit{USC}^{m-k}(V)) \leftrightarrow \phi)$$

c.q.f.d.

Références

Theodore HAILPERIN, A set of axioms for logic, Journal of Symbolic Logic 9 (1944), 1–19.

Kurt GÖDEL, The Consistency of the Continuum Hypothesis, Princeton University Press (1940), 3–11.