RAMIFICATION ET PRÉDICATIVITÉ

Marcel CRABBÉ

Les exigences auxquelles doit satisfaire la théorie prédicative des types ont contraint celle-ci à exclure des ensembles qui, tel la réunion d'un ensemble donné, sont d'usage courant (voir [1]) ([1]). La théorie ramifiée des types est appelée à lever ces limitations tout en respectant, en principe, la prédicativité. On en rejettera donc toute définition faisant référence à une totalité qui renferme l'objet à définir. Mais, d'autre part, on ne s'y restreindra pas aux ensembles définis prédicativement. Ces deux revendications demeurent contradictoires tant qu'on n'élargit pas la notion de «type». On échappe à cette contradiction en introduisant un nouveau concept, celui d'«*ordre*», qui, se combinant à celui de «type», permet de grouper les objets en *sortes*. Ces sortes correspondent, à peu de choses près, à ce que Russell nomme «type».

L'univers ramifié se construit, comme celui des types, à partir de la totalité des objets qui ne sont pas des ensembles. Ces objets forment la sorte 0. Les individus de cette sorte sont également de type 0 et d'ordre 0. Si α est une sorte d'objets de type k et d'ordre n, un ensemble d'objets de sorte α est de type $k + 1$. Son type est donc directement fonction de celui de ses éléments. Son ordre, par contre, dépend essentiellement de la formule qui le définit, bien qu'il ne soit pas complètement déterminé par elle. Il ne peut en aucun cas être inférieur ou égal à l'ordre des éléments d'une totalité qu'elle présupposerait tant par le biais de quantificateurs que par celui de paramètres. Il peut, en revanche, être égal au nombre m, par exemple, si cette formule ne contient pas de variable libre d'ordre $m + 1$ ou plus, ni de quantificateur portant sur une classe d'objets d'ordre m ou plus. Nous pouvons donc supposer que cet ensemble est d'ordre strictement supérieur à l'or-

([1]) Bien que nous renvoyions constamment à cet article, l'intelligence du présent travail n'en demande qu'une lecture superficielle.

dre n de ces éléments. Dès lors, si $m > n$, $m(\alpha)$ désignera la sorte des ensembles d'objets de sorte α, d'ordre m.

Cette construction lève la contradiction initiale. Les restrictions imposées à la formation d'un ensemble concernant les ordres apportent des garanties suffisantes pour que le principe de prédicativité soit maintenu. En outre, toute formule peut cette fois définir un ensemble. Mais celui-ci se verra assigner un ordre suffisamment élevé, afin de conjurer le cercle vicieux.

La présentation que nous venons de donner met l'accent sur les trois notions de type, d'ordre et de sorte. La dernière de ces notions n'est pas toujours suffisamment mise en évidence par les auteurs qui se réfèrent aux théories ramifiées et, en premier lieu, par Russell. Elle permet pourtant de résoudre la difficulté principale liée à ces théories, qu'est leur formalisation. Celle-ci ne peut pas se borner à ajouter simplement une hiérarchie «horizontale» des ordres à celle, «verticale», des types. Elle doit pouvoir en plus rendre compte de différences de constitution entre objets de même type et de même ordre. Ainsi, elle devra permettre de discerner les objets d'ordre 3 et de type 2 ayant des éléments d'ordre 1, de ceux, également d'ordre 3 et de type 2, ayant des éléments d'ordre 2. Or cela n'est possible que si l'on distingue des *sortes* d'objets d'un type et d'un ordre donnés, par exemple $3(1(0))$ et $3(2(0))$.

Le formalisme que nous utiliserons s'inspire notamment de Lorenzen [2]. Comme dans [1], nous nous limiterons à des théories sans symboles spéciaux pour les relations, ou ensembles de n-uples. On peut toujours, en principe, s'en dispenser en définissant le couple d'une manière appropriée. Nous ne tiendrons pas compte non plus de l'axiome de l'infini et de l'axiome du choix. Ceux-ci posent des problèmes particuliers qui, du reste, ne sont pas propres à la ramification.

Certaines propositions, qui ont déjà fait l'objet d'une argumentation non technique ou trop peu satisfaisante, pourront être démontrées clairement dans ce formalisme. De plus, il ressortira du théorème 5 de cet article, que la théorie ramifiée, qui se présente comme étant plus riche que la simple théorie prédicative n'est pas, en fait, plus puissante que celle-ci.

1. *Le langage $\mathscr{S}$.*

1.1. *Sortes, types, ordres et degrés.*

Une *sorte* est une suite finie strictement décroissante de nombres naturels ayant 0 pour dernier terme.

Les *types* et les *ordres* sont des entiers positifs. $\tau(\alpha)$, ou le *type de la sorte* α, est le prédécesseur (dans la suite des entiers) de la longueur de α.

Si n est un entier strictement positif, inférieur ou égal à la longueur de la sorte α, $\alpha(n)$ est le n^{ieme} terme de la suite α.

$0(\alpha)$, ou l'*ordre de* α, est $\alpha(1)$. L'ordre d'une sorte est donc toujours supérieur ou égal à son type.

$\delta(\alpha)$, ou le *degré de* α, est le nombre $0(\alpha) - \tau(\alpha)$. Si p est un entier strictement positif et strictement inférieur à la longueur de α, $\alpha - p$ est la sorte obtenue en ôtant le terme $\alpha(p)$ de la suite α.

Exemples.

Soient les sortes:

4, 3, 2, 1, 0; 0; 4, 2, 0 et 5, 0.

Désignons-les respectivement par α, β, γ et ε. On a:

$\tau(\beta) = 0(\beta) = 0; \tau(\varepsilon) = 1; \tau(\gamma) = 2;$
$\tau(\alpha) = 0(\alpha) = 0(\gamma) = 4;\ 0(\varepsilon) = 5;\ \delta(\alpha) = \delta(\beta)$
$= 0;\ \delta(\gamma) = 2;\ \delta(\varepsilon) = 4;\ \alpha - 1 = 3, 2, 1, 0;$
$\alpha - 2 = 4, 2, 1, 0;\ \alpha - 3 = 4, 3, 1, 0;\ \alpha - 4 = 4, 3, 2, 0;$
$\gamma - 1 = 2, 0;\ \gamma - 2 = 4, 0;\ \varepsilon - 1 = 0.$

Pour la convenance des notations, une sorte α autre que 0 sera parfois notée $\alpha(1)\ (\alpha - 1)$.

1.2. *Symboles.*

Pour chaque sorte α, on dispose d'une infinité dénombrable de *variables,* notées: x^α, y^α, z^α .... On suppose qu'il y a, pour chaque sorte, une énumération des variables de cette sorte.

Chaque variable est donc déterminée par sa sorte et par son *numéro,* ou sa place dans l'énumération des variables de même sorte ([2]). Nous convenons de désigner la n^{ieme} variable de sorte β par x^β, si x^α désigne la n^{ieme} variable de sorte α.

Pour chaque sorte α autre que 0, $\mathscr{S}$ possède un symbole relationnel binaire: $\in_\alpha$.

$\mathscr{S}$ contient également les symboles logiques usuels, le symbole d'égalité et les parenthèses.

1.3. *Formules.*

Les formules atomiques sont celles de la forme: $x^{\alpha-1} \in_\alpha y^\alpha$ et $x^\alpha = y^\alpha$. Les autres formules se construisent à partir de celles-là en utilisant les signes logiques et les parenthèses ([3]).

1.4. *Remarques et définitions.*

Les notions de type, d'ordre et de degré d'une sorte α s'étendent, par abus de langage, aux variables de sorte α. Donc, $\tau(x^\alpha) = \tau(\alpha)$, $0(x^\alpha) = 0(\alpha)$ et $\delta(x^\alpha) = \delta(\alpha)$.

Une *formule* est d'*ordre* $k (k \geqslant 0)$ si les variables ayant des occurrences libres dans cette formule sont d'un ordre inférieur ou égal à k et les variables ayant des occurrences liées dans cette formule, d'un ordre strictement inférieur à k.

On remarquera que, par cette définition, une formule d'ordre k est également d'ordre n, si $n \geqslant k$.

Si $m \geqslant 0$, $\mathscr{S}(m)$ est le fragment de $\mathscr{S}$ dont on a exclu les variables (et les formules qui en dérivent) de degré strictement supérieur à m. Une *formule* de *degré* m est une formule de $\mathscr{S}(m)$.

Les indices indiquant les sortes seront omis lorsqu'aucune ambiguïté n'est possible ou à craindre.

([2]) La n^{ieme} variable α est assimilable au couple $\langle n, \alpha \rangle$.

([3]) Si φ et ψ son des formules, alors $>\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\exists x^\alpha \varphi$, $\forall x^\alpha \varphi$ sont également des formules.

2. *La théorie TR*

Les axiomes logiques et les règles de déduction de TR sont des adaptations évidentes au langage $\mathscr{S}$ des axiomes et règles du calcul des prédicats avec égalité. Cela veut dire notamment qu'en plus des restrictions habituelles qui permettent de formuler axiomes et règles, il est exigé qu'une variable ne peut être substituée qu'à une variable de même sorte [4].

Le système TR comprend, en outre, des axiomes d'*extensionnalité* et de *compréhension*. La classe *Ext* des axiomes d'extensionnalité est l'ensemble des formules de la forme:

$$\forall z^{\alpha-1} (z^{\alpha-1} \in_\alpha x^\alpha \leftrightarrow z^{\alpha-1} \in_\alpha y^\alpha) \rightarrow x^\alpha = y^\alpha.$$

La classe *Comp* des axiomes de compréhension est l'ensemble des formules de la forme:

$\exists y^\alpha \forall x^{\alpha-1} (x^{\alpha-1} \in_\alpha y^\alpha \leftrightarrow \varphi)$, où φ est une formule d'ordre $0(\alpha)$ et où y^α n'a pas d'occurrences libres dans φ.

Au cas où $\exists y^\alpha \forall x^{\alpha-1} (x^{\alpha-1} \in_\alpha y^\alpha \leftrightarrow \varphi)$ est un axiome de compréhension, l'expression $\{x^{\alpha-1} \mid \varphi\}^\alpha$ sera admise pour abréger certaines formules. Les règles qui gouvernent l'utilisation de ces expressions seront conformes à l'usage en la matière pour le premier ordre. De même, les expressions $\{x^{\alpha-1}\}^\alpha$ et $\{T(x) \mid \varphi\}^\alpha$ serviront d'abréviations pour $\{v^{\alpha-1} \mid v^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}\}^\alpha$ et $\{v^{\alpha-1} \mid \exists x (v^{\alpha-1} = T(x) \wedge \varphi)\}^\alpha$, respectivement. L'harmonie de ces écritures est liée à la présence des axiomes d'extensionnalité [5].

[4] Ainsi les formules de la forme $(\forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y))$ ne seront admises au rang d'axiome que si x et y sont de même sorte.

Il faut signaler à ce propos que le non-respect de cette clause ne viole pas nécessairement les règles de *formation*. On peut, par exemple, remplacer dans la formule $x^0 \in y^{1(0)}$, la variable $y^{1(0)}$ par $z^{2(0)}$ pour obtenir l'expression $x^0 \in z^{2(0)}$ qui reste bien formée.

[5] Si $\alpha - 1 = \beta - 1$ et si $0(\alpha) \neq 0(\beta)$, les expressions $\{x^{\alpha-1} \mid \varphi\}^\alpha$ et $\{x^{\alpha-1} \mid \varphi\}^\beta$ sont distinctes et se réfèrent à des ensembles distincts. L'indice marquant la sorte de ces expressions est donc indispensable pour éviter l'ambiguïté.

Si $m \geqslant 0$, *Comp* $\cap \mathcal{S}$ (m) et Ext $\cap \mathcal{S}$ (m) sont désignés respectivement par *Comp* (m) et *Ext* (m) . $\vdash$ (m) est la relation de déductibilité restreinte à $\mathcal{S}$ (m). En d'autres termes, si $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ et ψ sont des formules de $\mathcal{S}$ (m), $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash$ (m) ψ signifie qu'il y a une dérivation (n'utilisant que la logique de TR) de ψ à partir de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, dont toutes les formules sont dans $\mathcal{S}$ (m). Enfin, TR (m) est le fragment de TR basé sur $\vdash$ (m), qui a *Comp* (m) + *Ext* (m) pour axiomes non logiques.

Convenons qu'une formule est *normale* ssi il n'y a pas dans cette formule d'occurrences de deux variables distinctes de même numéro. Dans un but de simplification, certaines propositions concernant une classe de formules seront restreintes aux formules normales de cette classe. Cela n'aura pas d'incidence sur la généralité de ces propositions dans la mesure où — c'est aisé à voir — tout énoncé est équivalent à un énoncé normal et où toutes les formules apparaissant dans une démonstration (formelle) d'une formule normale peuvent être supposées normales.

3. *Structures et modèles.*

Une *structure* $\mathcal{M}$ pour le langage $\mathcal{S}$ ou pour l'un de ses fragments est la donnée pour chaque sorte α (du langage), d'un ensemble non vide M_α et pour chaque sorte β (du langage) autre que 0, d'une relation $<_\beta$ entre éléments de $M_{\beta-1}$ et M_β ($<_\beta \subseteq M_{\beta-1} \times M_\beta$) [6].

Les notions de satisfaction et de *modèle* peuvent se définir par extension des notions correspondantes pour le calcul des prédicats, à condition d'assigner aux variables de sorte α des éléments de M_α et de faire correspondre à $\in_\beta$ la relation $<_\beta$. C'est également par généralisation que la célèbre preuve de Henkin (pour le premier ordre) montre que tout ensemble de formules, cohérent avec la logique de TR, admet un modèle.

[6] Les fragments de $\mathcal{S}$ que nous considérons possèdent toujours la sorte $\beta - 1$ s'ils possèdent β.

4. *L'équivalence formelle.*

Le concept d'équivalence formelle, introduit par Russell, permet de relier entre elles des fonctions propositionnelles qui, quoique d'ordres différents, se trouvent néanmoins vérifiées par les mêmes objets. Nous exprimerons cette relation, qui sera notée $\sim$, dans le cadre de la théorie TR de la manière suivante:

$$x^0 \sim y^0 \quad \text{ssi} \quad x^0 = y^0;$$
$$x^\alpha \sim y^\beta \quad \text{ssi} \quad (\forall z^\gamma (z^\gamma \in x^\alpha \leftrightarrow z^\gamma \in y^\beta)),$$

où, bien entendu, $\gamma = \alpha - 1 = \beta - 1$.

Théorème 1.

a. $\sim$ est une relation d'équivalence.
b. Si $0(\alpha) \leqslant 0(\beta)$ et si $\alpha - 1 = \beta - 1$, alors $TR \vdash \forall x^\alpha \exists y^\beta (y^\beta \sim x^\alpha)$.
c. Si $\varphi(x^\alpha)$ et $\varphi(y^\beta)$ sont des formules et si $\alpha - 1 = \beta - 1$, alors $TR \vdash x^\alpha \sim y^\beta \rightarrow (\varphi(x^\alpha) \leftrightarrow \varphi(y^\beta))$.

Démonstration. a est immédiat et b découle directement des axiomes de compréhension. Pour démontrer c, nous éliminons d'emblée le cas, trivial, où x^α n'a pas d'occurrence libre dans $\varphi(x^\alpha)$. Nous constatons également que c se déduit des axiomes d'extensionnalité et logiques, si $0(\alpha) = 0(\beta)$. Il reste donc à envisager le cas où x^α a au moins une occurrence libre dans $\varphi(x^\alpha)$ et où $0(\alpha) \neq 0(\beta)$. Si $\varphi(x^\alpha)$ est une formule atomique, alors, compte tenu de ce que l'expression $\varphi(y^\beta)$ est bien formée, il y a deux possibilités:

1. $\varphi(x^\alpha)$ est de la forme $z^{\alpha-1} \in x^\alpha$ et, dès lors, $\varphi(y^\beta)$ est $z^{\beta-1} \in y^\beta$;
2. $\varphi(x^\alpha)$ est $x^\alpha = x^\alpha$ et, dès lors, $\varphi(y^\beta)$ est $y^\beta = y^\beta$.

La proposition est chaque fois vérifiée. Le résultat s'obtient, à partir de là, par induction.
Le théorème qui suit généralise un axiome logique.

Théorème 2.

Si $\varphi(x^\alpha)$ et $\varphi(y^\beta)$ sont des formules et si $0(\beta) \leqslant 0(\alpha)$, alors $TR \vdash \forall x^\alpha \varphi(x^\alpha) \rightarrow \varphi(y^\beta)$.

Démonstration. Le seul cas pertinent est celui où l'une des occurrences — prises en considération — de x^α dans $\varphi(x^\alpha)$ se trouve dans une sous-formule autre que $x^\alpha = x^\alpha$ et où $0(\beta) < 0(\alpha)$. Soit $z^{\alpha-1} \in x^\alpha$ une telle sous-formule. Alors $z^{\alpha-1} \in y^\beta$ est bien formée. Par conséquent, $\alpha - 1 = \beta - 1$. Le théorème 1, b et l'hypothèse donnent donc: $TR \vdash \exists x^\alpha (x^\alpha \sim y^\beta)$.
D'autre part, le théorème 1, c et la logique entrainent:

$$TR \vdash x \sim y \rightarrow (\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y)),$$
$$TR \vdash x \sim y \rightarrow (\forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y))$$

et

$$TR \vdash \exists x (x \sim y) \rightarrow (\forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)).$$

D'où, $TR \vdash \forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)$. □

5. *Ramification et prédicativité.*

Dans cette section, nous entamons l'étude des rapports entre TR et la théorie TP, présentée dans [1]. Ces deux systèmes sont formulés dans des langages différents. Le langage $\mathscr{L}$ de TP utilise des variables indexées par des types (entiers positifs) et non, comme c'est le cas pour $\mathscr{S}$, par des sortes. Des procédés de traduction seront nécessaires pour comparer TP et TR.

En vue de traduire les expressions de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{S}$, on associe à chaque type k une sorte $\sigma(k)$ de manière que:
On transforme ensuite chaque formule φ de $\mathscr{L}$ en une formule

$$\sigma(0) = 0,$$
$$\sigma(n+1) = n+1(\sigma(n)).$$

$\sigma[\varphi]$ de $\mathscr{S}$ en y remplaçant chaque variable $\overset{k}{x}$ par $\overset{\sigma(k)}{x}$.

Moyennant cette traduction, TP apparaît comme une partie de TR. En effet,

Théorème 3.

Si TP $\vdash \varphi$, alors TR $\vdash \sigma[\varphi]$.

Démonstration. Il suffit de montrer que la suite de formules de $\mathscr{S}$ obtenue en traduisant les formules d'une dérivation (formelle) de φ dans TP, est une dérivation (formelle) de $\sigma[\varphi]$ dans TR. Les axiomes logiques et d'extensionnalité sont préservés par l'opérateur σ, ainsi que les règles de dérivation. σ préserve également les axiomes de compréhension car $\sigma[\exists \overset{k+1}{y} \forall \overset{k}{x} (\overset{k}{x} \in \overset{k+1}{y} \leftrightarrow \psi)]$ est $\exists \overset{\sigma(k+1)}{y} \forall \overset{\sigma(k)}{x} (x \in y \leftrightarrow \sigma[\psi])$, et $\sigma[\psi]$ est d'ordre k + 1, c'est-à-dire d'ordre 0 (σ (k + 1)), si ψ l'est. □

Ce théorème peut être également prouvé en remarquant que la partie d'un modèle de TR, constituée par les univers et relations pour les sortes de degré 0, donne un modèle de TP.

6. *Ramification et prédicativité (suite).*

La technique utilisée pour traduire les formules du langage $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{S}$ vient d'être décrite. La traduction inverse, de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{L}$, s'effectue de manière similaire en associant à chaque formule φ de $\mathscr{S}$ une formule $\tau[\varphi]$ obtenue par remplacement des variables x^α par $\overset{\tau(\alpha)}{x}$. Il y a lieu toutefois de se limiter ici à traduire des formules *normales* afin de respecter les différences entre les variables.

L'analogue du théorème 3 affirmerait que $\tau[\varphi]$ est dérivable dans TP lorsque φ l'est dans TR. Cette proposition est, cette fois, erronée. Il suffit, pour s'en rendre compte, de considérer l'axiome $\exists y^{2\,(0)} \forall x^0 (x^0 \in y^{2\,(0)} \leftrightarrow \exists v^{1\,(0)} (v^{1\,(0)} \in z^{2\,(1\,(0))} \wedge x^0 \in v^{1\,(0)})$ de TR dont la traduction n'est pas dérivable dans

TP (voir [1]). Ce phénomène est dû à la présence, dans cet axiome, d'une variable de degré 1. En effet, ainsi que ce sera démontré dans les paragraphes 7 et 8, la proposition est vraie pour les formules de degré 0 [7]. Cela montrera que TR n'est pas, à vrai dire, plus puissante que TP.

Lemme 1.

Si φ est une formule de $\mathscr{S}(0)$, on a TR (0) $\vdash \varphi$ ssi TP $\vdash \tau[\varphi]$.
Démonstration. $\delta(\sigma(k)) = 0$, quel que soit le type k et $\tau[\varphi]$ est un axiome de TP ssi φ est un axiome de TR (0). □

Attachons-nous donc à démontrer que TR est une extension conservatrice de TR (0).

7. *Réduction de TR.*

Pour montrer plus aisément dans la section 8 que TR n'est pas plus forte que TR (0), on analysera d'abord les axiomes qu'il faut ajouter à ceux de TR (0) pour avoir TR.

Definitions.

1. Si x est de sorte $\alpha - p$, $h(p, \alpha)(x)$ est défini récursivement par les schémas:
   $h(1, \alpha)(x) = \{x\}^{\alpha}$;
   $h(q+1, \alpha)(x) = \{h(q, \alpha-1)(v) \mid v \in x\}^{\alpha}$.
2. Si $\alpha - p$ est une sorte, $H(p, \alpha)$ est le prédicat, pour les objets de sorte α, défini par les schémas:
   $H(1, \alpha)(x)$ ssi $\exists y^{\alpha-1}(\{y\}^{\alpha} = x)$;
   $H(q+1, \alpha)(x)$ ssi $\forall z(z \in x \rightarrow H(q, \alpha-1)(z))$.
3. $\mathscr{H}$ est la classe des formules résultant de l'addition à *Ext* des axiomes de compréhension de la forme:
   $\exists y(y = h(p, \alpha)(x))$.
4. $\mathscr{G}$ est la classe des formules résultant de l'addition à *Ext*

[7] Les formules de degré 0 sont évidemment normales.

des axiomes de compréhension de la forme:
$\exists y \, \forall v \, (v \in y \leftrightarrow h\,(p, \alpha)\,(v) \in x)$.

5. $\mathscr{F}$ est la classe $\mathscr{H} \cup \mathscr{G}$.
6. $\mathscr{H}$ (m), $\mathscr{G}$ (m) et $\mathscr{F}$ (m) sont, respectivement, $\mathscr{H} \cap \mathscr{S}$ (m), $\mathscr{G} \cap \mathscr{S}$ (m) et $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ (m).

Lemme 2.

a. Si $\delta\,(x) = m$,
$\mathscr{H}\,(m) \vdash (m)\; x = y \leftrightarrow h\,(p, \alpha)\,(x) = h\,(p, \alpha)\,(y)$.
Si $\delta\,(y) = n$,
$\mathscr{H}\,(n) \vdash (n)\; x \in y \leftrightarrow h\,(p - 1, \alpha - 1)\,(x) \in h\,(p, \alpha)\,(y)$.

b. Si $m = \delta\,(\alpha)$,
$\mathscr{F}\,(m + 1) \vdash (m + 1)\; H\,(p, \alpha)\,(x) \leftrightarrow \exists y\,(x = h\,(p, \alpha)\,(y))$.

c. Si $m = \delta\,(y)$,
$\mathscr{H}\,(m) \vdash (m)\; H\,(p, \alpha)\,(h\,(p, \alpha)\,(y))$.

d. Les formules $H\,(p,\alpha)\,(x)$ relèvent du langage $\mathscr{S}\,(\delta\,(x))$. Les formules $x = h\,(p, \alpha)\,(y)$ relèvent du langage $\mathscr{S}\,(\delta\,(x) + 1)$.

Démonstration. a et d sont des conséquences directes des définitions et c découle de b.

b se démontre par récurrence sur p. On peut supposer d'emblée que $p > 1$. Par la définition 1 et par l'hypothèse de récurrence, $\mathscr{H}\,(m + 1) \vdash (m + 1)\; x = h\,(p, \alpha)\,(y) \rightarrow \forall z\,(z \in x \rightarrow H\,(p - 1, \alpha - 1)\,(z))$ et, par la définition 2,
$\mathscr{H}\,(m + 1) \vdash (m + 1)\; \exists y\,(x = h\,(p, \alpha)\,(y) \rightarrow H\,(p, \alpha)\,(x)$.

Pour montrer l'implication inverse, désignons par φ la formule $\forall v\,(v \in y \leftrightarrow h\,(p - 1, \alpha - 1)\,(v) \in x)$. Alors, $\mathscr{G}\,(m + 1) \vdash (m + 1)\; \exists y\, \varphi$. D'autre part, l'hypothèse de récurrence, les définitions 1 et 2 et le point a donnent $\mathscr{H}\,(m + 1) \vdash (m + 1)\; ((H\,(p, \alpha)\,(x) \wedge \varphi) \rightarrow x = h\,(p, \alpha)\,y)$ et, $\mathscr{H}\,(m + 1) \vdash (m + 1)\; \varphi \rightarrow (H\,(p, \alpha)\,(x) \rightarrow \exists y\,(x = h\,(p\,\alpha)\,(y)))$.
D'où la conclusion. □

Les deux opérations f et g qui seront définies ci-après agissent sur les formules normales d'un langage $\mathscr{S}\,(m + 1)$ $(m \geqslant 1)$. Elles permettront d'effectuer la réduction de TR à l'un de ses fragments. Les deux définitions seront données simultanément, chacune d'elle se fera par induction sur la longueur des formules.

1. Considérons d'abord les formules de la forme $x^{\alpha-1} \in y^{\alpha}$.
   1.1. Si $\delta(y) \leqslant m$,
   $f[x \in y] \equiv g[x \in y] \equiv x \in y$.
   1.2. Si $\delta(y) = m + 1$ et si
      1.2.1. $\delta(x) \leqslant m$, alors $\alpha(1) \neq \alpha(2) + 1$ et $f[x \in y] \equiv \exists z(\forall v(v \in z \leftrightarrow v = x) \wedge z \in h(2, \beta)(y))$,
      $g[x^{\alpha-1} \in y^{\alpha}] \equiv \exists z(\forall v(v \in z \leftrightarrow v = x^{\alpha-1}) \wedge z \in y^{\beta})$, où $\beta = \alpha(1)(\alpha(2) + 1(\alpha - 1))$.
      1.2.2. $\delta(x) = m + 1$, alors $\alpha(1) = \alpha(2) + 1$ et
      $f[x \in y] \equiv h(p-1, \beta-1)(x) \in h\, p, \beta)(y)$,
      $g[x^{\alpha-1} \in y^{\alpha}] \equiv x^{\beta-1} \in y^{\beta}$,
      où p est le premier entier tel que $\alpha(p-1) \neq \alpha(p) + 1$ et où $\beta(n) = \alpha(n)$, si $n < p$, $\beta(p) = \alpha(p) + 1$ et $\beta(m) = \alpha(m-1)$, si $m > p$.

2. Soit la formule $x^{\alpha} = y^{\alpha}$.
   2.1. Si $\delta(x) \leqslant m$,
   $f[x = y] \equiv g[x = y] \equiv x = y$.
   2.2. Si $\delta(x) = m + 1$,
   $f[x = y] \equiv h(p, \beta)(x) = h(p, \beta)(y)$,
   $g[x^{\alpha} = y^{\alpha}] \equiv x^{\beta} = y^{\beta}$,
   où p et β sont définis comme en 1.2.2.

3. $f[\varphi \vee \psi] \equiv f[\varphi] \vee f[\psi]$,
   $g[\varphi \vee \psi] \equiv g[\varphi] \vee g[\psi]$,
   $f[> \varphi] \equiv > f[\psi]$,
   $g[> \varphi] \equiv > g[\varphi]$.

4. Soit la formule $\exists x^{\alpha} \varphi(x^{\alpha})$.
   4.1. Si $\delta(\alpha) \leqslant m$, ou si x n'a pas d'occurrences libres dans $\varphi(x)$,
   $f[\exists x \varphi(x)] \equiv \exists x f[\varphi(x)]$,
   $g[\exists x \varphi(x)] \equiv \exists x g[\varphi(x)]$.
   4.2. Sinon, $f[\varphi(x)]$ est de la forme $\psi(h(p, \beta)(x))$, p et β étant définis en 1.2.2. En ce cas,

$$f[\exists x^{\alpha}\varphi(x)] \equiv \exists x^{\beta}(H(p,\beta)(x) \wedge \psi(x)),$$
$$g[\exists x^{\alpha}\varphi(x)] \equiv \exists x^{\beta}(H(p,\beta)(x) \wedge g[\psi(x)]).$$

Le lemme suivant est un ensemble de remarques à propos de ces définitions.

Lemme 3.

Si φ est une formule de $\mathscr{S}(m+1)$, alors
a. $\mathscr{F}(m+1) \vdash (m+1)\ \varphi \leftrightarrow f[\varphi]$,
b. $g[\varphi]$ est une formule de $\mathscr{S}(m)$,
c. $g[\varphi]$ est d'ordre k ssi φ est d'ordre k,
d. $f[\varphi]$ est le résultat de la substitution à certaines variables libres x^{β} dans $g[\varphi]$ de termes de la forme $h(p,\beta)(x)$. □

Lemme 4.

Dans la théorie TR (m) + $\mathscr{F}(m+1)$, de langage $\mathscr{S}(m+1)$, on peut dériver les formules de *Comp* (m + 1).

Démonstration. Soit $\exists y^{\alpha}\ \forall x^{\alpha-1}(x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$, un axiome de *Comp* (m + 1)· On élimine les situations triviales en supposant que cet axiome n'est pas dans *Comp* (m) et que x apparaît librement dans $\varphi(x)$.

1. Si $\varphi(x)$ est de degré m, alors $\delta(\alpha) = m+1$ et $\alpha(1) > \alpha(2)+1$.
   Dès lors,
   Comp (m) + $\mathscr{H}(m+1) \vdash (m+1)\ \exists y^{\beta}\ \forall z\,(z \in y \leftrightarrow \exists x\,(z = h(1,\beta-1)(x) \wedge \varphi(x)))$, où $\beta = \alpha(1)(\alpha(2)+1(\alpha-1))$ (lemme 2, d).
   On en déduit que
   Comp (m) + $\mathscr{F}(m+1) \vdash (m+1)\ \exists y^{\alpha}\ \forall z\,(z \in y \leftrightarrow \exists x\,(h(1,\beta-1)(z) = h(1,\beta-1)(x) \wedge \varphi(x)))$.
   La proposition suit de là par le lemme 2, a.
2. $\varphi(x)$ n'est pas de degré m.
   2.1. Si $\delta(x) \leqslant m$. En utilisant le premier cas et le lemme 3, b, c, on obtient:

Comp (m) + $\mathscr{F}$ (m + 1) $\vdash$ (m + 1) $\exists y^{\alpha} \forall x (x \in y \leftrightarrow g [\varphi (x)])$ et
Comp (m) + $\mathscr{F}$ (m + 1) $\vdash$ (m + 1) $\exists y^{\alpha} \forall x (x \in y \leftrightarrow f [\varphi (x)]$.
Il suffit alors de se référer au lemme 3, a.

2.2. Si $\delta (x) = m + 1$, $\delta (a) = m + 1$ et $\alpha (1) = \alpha (2) + 1$.
Par le lemme 3, b, c, il vient:
Comp (m) $\vdash$ (m) $\exists y^{\beta} \forall x (x \in y \leftrightarrow g [\varphi (x)]$, p et β étant déterminés comme dans les définitions de f et de g. De là, si $\psi (h (p - 1, \beta - 1) (x))$ est la formule $f [\varphi (x)]$,
Comp (m) + $\mathscr{H}$ (m + 1) $\vdash$ (m + 1) $\exists y^{\beta} \forall x (x \in y \leftrightarrow \psi (x))$ et
Comp (m) + $\mathscr{F}$ (m + 1) $\vdash$ (m + 1) $\exists y^{\alpha} \forall x (x \in y \leftrightarrow f [\varphi (x)])$.
Ce qui, par le lemme 3, a, achève la démonstration. □

Théorème 4.

TR = TR (0) + $\mathscr{F}$. [8] □

8· «*Equivalence*» *de TR et TP.*

Par récurrence sur p', on a le

Lemme 5.

Si $p' \leqslant p$, $\alpha' - p' = \alpha - p$, $\beta - p' = \alpha$, $\beta - (p + 1) = \alpha'$ et $m = \delta (\alpha) + 1$, alors
$\mathscr{H}$ (m) $\vdash$ (m) $h (p', \beta) h (p, \alpha) (x) = h (p + 1, \beta) h (p', \alpha') (x)$. □

Théorème 5.

TR (m + 1) est une extension conservatrice de TR (m).

[8] Plus précisément, les axiomes non logiques de TR peuvent être remplacés par *Comp* (0) + $\mathscr{F}$.

Démonstration. Soit $\mathscr{M}$ un modèle de TR (m). Nous nous proposons de l'étendre en un modèle de TR (m + 1), c'est-à-dire, par le lemme 4, en un modèle de TR (m) + $\mathscr{F}$ (m + 1). En outre, nous prouverons qu'une telle extension s'obtient par simple addition à $\mathscr{M}$ d'univers et de relations pour les sortes de degré m + 1. De cette façon, le nouveau modèle satisfera les mêmes formules de $\mathscr{S}$ (m) que le modèle $\mathscr{M}$.
On construira une suite de structures $\mathscr{M}_0, \mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \ldots$ telle que: $\mathscr{M}_0 = \mathscr{M}$; $\mathscr{M}_{k+1}$ $(k \geqslant 0)$ résulte de l'addition à $\mathscr{M}_k$ d'univers M_γ et de relations $<_\gamma$ pour les sortes γ de degré m + 1 et de type k + 1. Chaque $\mathscr{M}_n$ sera une structure pour le fragment — que nous appellerons $\mathscr{S}$ ((n)) — du langage $\mathscr{S}$ réduit aux variables qui sont soit de degré inférieur à m + 1, soit de degré m + 1 et de type inférieur ou égal à n. Leur réunion sera de ce fait une structure pour $\mathscr{S}$ (m + 1).

Il apparaîtra sans preuve en cours de construction que ces structures sont des modèles des axiomes de $\mathscr{G}$ et donc de *Ext*, compris dans les limites des langages correspondants. Leur réunion sera donc le modèle de TR (m + 1) cherché si elles satisfont les axiomes de $\mathscr{H}$ appartenant à leurs langages. Comme $\mathscr{M}_0$ est un modèle de TR (m), la démonstration ne concernera que le passage de $\mathscr{M}_k$ à $\mathscr{M}_{k+1}$, quel que soit k $(k \geqslant 0)$.

Définissons $\mathscr{H}$ ((n)) comme étant la classe des axiomes $\mathscr{H}(m + 1) \cap \mathscr{S}$ ((n)) et supposons que $\mathscr{M}_k$ est un modèle de $\mathscr{H}$ ((k)).

Si γ est une sorte de degré m + 1 et de type k + 1, les éléments de M_γ sont les ensembles de la forme $\{v \in M_{\gamma-1} \mid \mathscr{M}_k \models h\,(p - 1, \alpha - 1)\,(v) \in x\}$, où x appartient à M_α, $p > 1$ et $\alpha - p = \gamma$. Cette définition est légitime parce que $\mathscr{M}_k$ est un modèle de $\mathscr{H}$ ((k)). En outre, M_γ est non vide, puisqu'il y a au moins une sorte α et un nombre p $(p > 1)$ tels que $\alpha - p = \gamma$.

La relation $<_\gamma$ est l'appartenance entre éléments de $M_{\gamma-1}$ et de M_γ. En d'autres termes, si v est dans $M_{\gamma-1}$ et y dans M_γ, on pose:

$$v <_\gamma y \text{ ssi } v \text{ est un élément de } y.$$

Soit $\exists y\,(y = h\,(p, \alpha)\,(x))$ un axiome de $\mathscr{H}$ $((k + 1))$. Montrons qu'il est valide dans $\mathscr{M}_{k+1}$.

1. $p = 1$.
   On peut se limiter au cas où $\delta\,(\alpha) = m + 1$ et $\tau\,(\alpha) = k + 1$. Il y a une sorte β de degré m et un nombre q $(q > 1)$ tels que $\alpha = \beta - q$. Dès lors $\alpha - 1 = (\beta - 1) - (q - 1)$ et $\mathscr{M}_k \models \exists y\,(y = h\,(q - 1, \beta - 1)\,(x))$. Donc, en appliquant le lemme 2, a, si $x \in M_{\alpha - 1}$, on a $\mathscr{M}_{k+1} \models h\,(1, \alpha)\,(x)$ $= \{v \mid h\,(q - 1, \beta - 1)\,(v) \in h\,(1, \beta)\,h\,(q - 1, \beta - 1)\,(x)\}$.
2. $p > 1$.
   Supposons cette fois que $\delta\,(\alpha - p) = m + 1$ et $\tau\,(\alpha - p)$ $= k + 1$.

Soit x un élément de H_γ $(\gamma = \alpha - p)$. Autrement dit: $x = \{v \in M_{\gamma - 1} \mid \mathscr{M}_k \models h\,(p' - 1, \alpha' - 1)\,(v) \in y\}$, pour un nombre p', une sorte α' et un élément y de $M_{\alpha'}$, tels que $p' > 1$, $\delta\,(\alpha') = m$ et $\gamma = \alpha' - p'$.

Si $\alpha = \alpha'$, alors $p = p'$ et $\mathscr{M}_{k+1} \models h\,(p, \alpha)\,(x) =$ $\{v \mid v \in y \wedge H\,(p' - 1, \alpha' - 1)\,(v)\}$. Si $\alpha \neq \alpha'$, alors $\alpha\,(p) \neq \alpha'\,(p')$.
En ce cas, nous pouvons supposer [9] que $\alpha'\,(p') > \alpha\,(p)$ et, partant, $p' \leqslant p$. Il y a, dès lors, une unique sorte β telle que $\beta - (p + 1) = \alpha'$ et $\beta - p' = \alpha$. Nous montrons que l'élément z de M_α tel que $\mathscr{M}_{k+1} \models z = \{w^{\alpha - 1} \mid h\,(p' - 1, \beta - 1)\,(w) \in$ $h\,(p + 1, \beta)\,h\,(p', \alpha')\,(x)\}$ est l'ensemble $h\,(p, \alpha)\,(x)$ cherché.

Tout d'abord, $\mathscr{M}_{k+1} \models h\,(p, \alpha)\,(x) \subseteq z$. En effet, si

$\mathscr{M}_{k+1} \models v \in x$, il vient successivement:

$\mathscr{M}_{k+1} \models h\,(p, \beta - 1)\,h\,(p' - 1, \alpha' - 1)\,(v) \in h\,(p + 1, \beta)$ $h\,(p', \alpha')\,(x)$ (lemme 2, a),

$\mathscr{M}_{k+1} \models h\,(p' - 1, \beta - 1)\,h\,(p - 1, \alpha - 1)\,(v) \in h\,(p + 1, \beta)$ $h\,(p', \alpha')\,(x)$ (lemme 5),

et $\mathscr{M}_{k+1} \models h\,(p - 1, \alpha - 1)\,(v) \in z$.

Enfin, $\mathscr{M}_{k+1} \models z \subseteq h\,(p, \alpha)\,(x)$. Car si $\mathscr{M}_{k+1} \models w \in z$, il existe

[9] L'autre cas se démontre de façon symétrique.

un élément v de M_γ tel que $\mathscr{M}_{k+1} \models h(p'-1, \beta-1)(w) = h(p, \beta-1)\, h(p'-1, \alpha'-1)(v) \wedge v \in x$, et donc, $\mathscr{M}_{k+1} \models \exists v\,(w = h(p-1, \alpha-1)(v) \wedge v \in y)$ (lemmes 2, a et 5). □

Corollaire.

a. TR est une extension conservatrice de TR (0).
b. Si φ est une formule de $\mathscr{S}$ (0), alors TR $\vdash \varphi$ ssi TP $\vdash \tau[\varphi]$.
c. Si ψ est une formule de $\mathscr{L}$, alors TP $\vdash \psi$ ssi TR $\vdash \sigma[\psi]$.

Démonstration.

a. si φ est une formule $\mathscr{S}$ (0) et si TR $\vdash \varphi$, alors TR (m) $\vdash$ (m) φ, pour un entier m et, par m applications du théorème, TR (0) $\vdash$ (0) φ.
b. Si φ est dans $\mathscr{S}$ (0), $\sigma[\tau[\varphi]]$ est identique à φ.
Le théorème 3 montre donc que TP $\vdash \tau[\varphi]$ entraîne TR $\vdash \varphi$.
La réciproque se déduit du point a et du lemme 1.
c. Si ψ est une formule de $\mathscr{L}$, $\sigma[\psi]$ est une formule de $\mathscr{S}$ (0) et $\tau[\sigma[\psi]]$ est identique à ψ. La proposition suit du point b et du théorème 3. □

9. *Ramification et réductibilité.*

L'axiome de réductibilité fut introduit par Russell pour remédier à certaines difficultés engendrées par la ramification. On ne peut pas, par exemple, inférer d'une formule universelle $\forall x\, \varphi(x)$ chacune des instances (bien formées) $\varphi(y)$ (voir théorème 1). Il faut également se résigner à définir les nombres naturels d'une façon peu satisfaisante et imposer des restrictions au principe d'induction. On en arrive même, dans certains cas, à devoir admettre que le supremum d'un ensemble borné de réels est d'un ordre supérieur à l'ordre des éléments de cet ensemble. Pour contourner ces problèmes, l'axiome de réductibilité doit venir se surimposer de l'extérieur à une théorie apparemment suffisante. Or, ainsi que ce fut signalé par

Ramsey (voir [3]), cela n'est pas sans effets: l'axiome de réductibilité semble ruiner totalement la hiérarchie des ordres. Etranger aux motivations qui ont mené à la ramification, cet axiome fait apparaître la distinction des ordres comme une complication inutile superposée à celle des types. Il fut de ce chef condamné sans appel, mais aussi, à notre connaissance, sans véritable preuve.

Dans ce paragraphe, nous démontrerons le bien-fondé de ces critiques dans le cadre du système TR. Nous y montrerons que la version simplifiée des *Principia Mathematica* obtenue en ajoutant à TR l'axiome de réductibilité n'est, somme toute, qu'une présentation compliquée d'un système de théorie simple des types. Il en suivra, comme corollaire, que l'axiome de réductibilité est indépendant de TR.

La théorie TT, décrite dans [1], est une version simplifiée de la théorie simple des types. Les formules de cette théorie s'écrivent dans le langage $\mathscr{L}$. TT est plus forte que TR, en vertu du

Théorème 6.

Si φ est une formule normale de $\mathscr{S}$ et si TR $\vdash \varphi$, alors TT $\vdash \tau[\varphi]$.

Démonstration. TT admet, comme axiomes de compréhension, toutes les formules de $\mathscr{L}$ de la forme $\exists y^{n+1} \forall x^n (x^n \in y^{n+1} \leftrightarrow \psi)$, où y^{n+1} n'est pas libre dans ψ. La traduction d'un axiome de TR dans $\mathscr{L}$ est donc un axiome de TT. Cette traduction respecte également les règles de dérivation. Ainsi, toute dérivation de φ dans TR se transforme en une dérivation de $\tau[\varphi]$ dans TT. $\square$

On démontre également cela en notant que tout modèle $\mathscr{N}$ de TT s'étend en un modèle $\mathscr{M}$ de TR. Il suffit pour cela de poser $M_\alpha = N_{\tau(\alpha)}$ et $<_\beta = <_{\tau(\beta)-1}$

Parmi les multiples formes possibles de l'axiome de réductibilité, nous choisirons l'affirmation que tout ensemble d'un ordre donné dépassant d'au moins une unité l'ordre de ses éléments est formellement équivalent à un ensemble d'ordre immédiatement inférieur. Se postulat s'exprime dans $\mathscr{S}$ par l'ensemble *Red* des énoncés:

$\forall x^\beta \, \exists y^\alpha \, (y^\alpha \sim x^\beta)$, où $\alpha - 1 = \beta - 1$ et $\beta(1) = \alpha(1) + 1$.

La théorie PM, résultant de l'addition de *Red* à TR, est une simplification du système des *Principia Mathematica*.

Théorème 7.

a. $PM \vdash \forall x^\beta \, \exists y^\alpha \, (y^\alpha \sim x^\beta)$, si $\alpha - 1 = \beta - 1$.
b. Si $\varphi(x^\alpha)$ et $\varphi(y^\beta)$ sont des formules de $\mathscr{S}$, alors
   $PM \vdash \forall x^\alpha \, \varphi(x^\alpha) \rightarrow \varphi(y^\beta)$.

Démonstration. La proposition a. ne fait que combiner *Red* et le théorème 1, b. b. se démontre en apportant une modification évidente à la démonstration du théorème 2. □

Le théorème 1, c sera généralisé dans le lemme qui va suivre. Ce lemme est précédé de la

Définition.

Une formule (normale) ψ de $\mathscr{S}$ est une *variante* d'une formule (normale) φ de $\mathscr{S}$ ssi ψ est obtenu en remplaçant chaque variable de φ par une variable de même numéro et de même type.

Si ψ est une variante de φ, φ est également une variante de ψ et les traductions, dans $\mathscr{L}$, de φ et de ψ sont indiscernables ($\tau[\varphi] \equiv \tau[\psi]$).

Lemme 6.

Si $\psi(y_1, \ldots, y_n)$ est une variante de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, si la suite $x_1, \ldots, x_n$ mentionne toutes les variables libres de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ et si $x_i \sim y_i$ est une formule ($i \leqslant i \leqslant n$), alors $PM \vdash (x_1 \sim y_1 \wedge \ldots \wedge x_n \sim y_n) \rightarrow (\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(y_1, \ldots, y_n))$. En particulier, si φ et ψ sont des énoncés, $PM \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

La démonstration par récurrence sur la construction de $\varphi(x_1 \ldots, x_n)$, analogue à celle du théorème 1, c, ne rencontre qu'un seul cas non évident, celui du quantificateur. On le résout en faisant appel au théorème 7, a. □

Théorème 8.

a. Si φ est une formule normale de $\mathscr{S}$, alors PM $\vdash \varphi$ ssi TT $\vdash \tau\,[\varphi]$.

b. Si ψ est une formule de $\mathscr{L}$, alors TT $\vdash \psi$ ssi PM $\vdash \sigma\,[\psi]$.

Démonstration.

a. 1. En remarquant que la traduction des axiomes de *Red* sont démontrables dans TT, on prolonge la démonstration du théorème 6 pour obtenir que PM $\vdash \varphi$ entraîne TT $\vdash \tau\,[\varphi]$.

b. 1. Si TT $\vdash \psi$, alors PM $\vdash \sigma\,[\psi]$. L'opération σ préserve les axiomes logiques et d'extensionnalité ainsi que les règles de dérivation. Montrons qu'elle respecte les axiomes de compréhension. Soit $\exists\, y^{n+1}\ \forall\, x^n\,(x^n \in y^{n+1} \leftrightarrow \chi)$, un tel axiome. En admettant que $\sigma\,[\chi]$ soit d'ordre m (m $\geqslant$ n + 1), on a TR $\vdash \exists\, y^\beta\ \forall\, x\,(x \in y \leftrightarrow \sigma\,[\chi])$, si $\beta = m\,(\sigma\,(n))$. Par ailleurs, TR $\vdash z^{\sigma(n+1)} \sim y^{\beta} \to (\forall\, x\,(x \in y \leftrightarrow \sigma\,[\chi]) \to \forall\, x\,(x \in z \leftrightarrow \sigma\,[\chi]))$. D'où, PM $\vdash \sigma\,[\exists\, y^{n+1}\ \forall\, x^n\,(x \in y \leftrightarrow \chi)]$.

a. 2. Si TT $\vdash \tau\,[\varphi]$, PM $\vdash \sigma\,[\tau\,[\varphi]]$, en vertu de b. 1. Or $\sigma\,[\tau\,[\varphi]]$ est une variante de φ. Donc, par le lemme 6, PM $\vdash \varphi$.

b. 2. Si PM $\vdash \sigma\,[\psi]$, TT $\vdash \tau\,[\sigma\,[\psi]]$ a. 1.). Or $\tau\,[\sigma\,[\psi]]$ est identique à ψ. Donc, ... □

Corollaire.

Les énoncés de *Red* ne sont pas démontrables dans TR.

Sinon, TR serait identique à PM et, par le corollaire c du théorème 5, TP identique à TT, ce qui est absurde (voir [1]). □

RÉFÉRENCES

[1] CRABBÉ (M.), *La prédicativité dans les théories élémentaires,* Logique et Analyse, 1976, 74-75-76, pp. 255-266.

[2] LORENZEN (P.), *Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände,* The Journal of Symbolic Logic, 1951, *16,* pp. 81-106.

[3] RAMSEY (F. P.), *Foundations of mathematics,* Proceedings of the London Mathematical Society, 1925, Ser. 2, Vol. 5, pp. 338-384.